

Corrigés des exercices donnés le jeudi 11 juin

Exercice 117 p. 29

1. On a $45 = 3^2 \times 5$ et $20 = 2^2 \times 5$ donc $\frac{45}{20} = \frac{3^2 \times 5}{2^2 \times 5} = \frac{9}{4}$.
2. On a $63 = 3^2 \times 7$ et $42 = 2 \times 3 \times 7$ donc $\frac{63}{42} = \frac{3^2 \times 7}{2 \times 3 \times 7} = \frac{3}{2}$.
3. On a $121 = 11^2$ et $56 = 2^3 \times 7$ donc $\frac{121}{56}$ est irréductible.
4. On a $51 = 3 \times 17$ et $85 = 5 \times 17$ donc $\frac{51}{85} = \frac{3 \times 17}{5 \times 17} = \frac{3}{5}$.

Exercice 118 p. 29

1. Comme $21 = 3 \times 7$, les diviseurs premiers de 21 sont 3 et 7.
2. Comme $56 = 2^3 \times 7$, les diviseurs premiers de 56 sont 2 et 7.
3. Comme $256 = 2^8$, le seul diviseur premier de 256 est 2.
4. Comme $301 = 7 \times 43$, les diviseurs premiers de 301 sont 7 et 43.

Exercice 124 p. 29

1. C'est vrai. Soit un entier $n > 0$. Si a divise n alors $-a$ divise aussi n et $-a \neq a$. Ainsi, si on note k le nombre de diviseurs positifs de n alors n possède $2k$ diviseurs (positifs et négatifs). Ainsi, n a un nombre pair de diviseurs.
2. c'est faux. Les nombres premiers entre 20 et 30 sont 23 et 29 et les nombres premiers entre 40 et 50 sont 41, 43 et 47. Il y en a donc plus entre 40 et 50 qu'entre 20 et 30.
3. C'est faux. Un diviseur d'un nombre premier p est $-p$, -1 , 1 et p et les nombres $-p$, -1 et 1 ne sont pas premiers.

Exercice supplémentaire. Soit p un nombre premier et x et y deux entiers naturels tels que $x^2 - y^2 = p$. Déterminer x et y .

On remarque que $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$ donc $(x - y)(x + y) = p$. Comme x et y sont entiers, $x - y$ et $x + y$ aussi. Ainsi, $x - y$ et $x + y$ sont des diviseurs associés de p . De plus, y est positif donc $x - y \leq x + y$ donc, comme p est premier, $x - y = 1$ et $x + y = p$. On en déduit que $x = \frac{x+y+x-y}{2} = \frac{p+1}{2}$ et que $y = \frac{x+y-(x-y)}{2} = \frac{p-1}{2}$.

On peut remarquer que si $p = 2$ en fait x et y ne sont pas entiers donc un tel x et un tel y n'existe pas.