Fiche d'exercices n°10 — Étude qualitative d'une fonction (suite)

Exercice 1. On a tracé ci-dessous le tableau de variation d'une fonction f.

x	-6		-3		1		3		5
variations de f	3	↘	-6	↗	5	↘	4	↗	7

1. Déterminer l'ensemble de définition D de f.

2. Déterminer les extremums de f sur D.

3. Déterminer les extremums de f sur $[2\,;5]$.

4. Déterminer les extremums de f sur $[-6\,;3]$.

5. Comparer, lorsque cela est possible,

- **a.** $f(0)$ et $f(1)$;
- **b.** $f(-5)$ et $f(-4)$;
- **c.** $f(4)$ et 4 ;
- **d.** $f(-2)$ et $f(2)$;
- **e.** $f(2)$ et 6 ;
- **f.** $f(4)$ et $f(-4)$;
- **g.** $f(-5)$ et $f(-2)$.

Exercice 2. On considère une fonction f définie sur $[-3\,;4]$ telle que

- f est croissante sur $[-3\,;-1]$, décroissante sur $[-1\,;2]$ et croissante sur $[2\,;4]$;
- Les extremums de f sur $[-3\,;4]$ sont -2 et 5 ;
- l'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = 0$ est $\{-3\,;0\,;4\}$.

1. Tracer une courbe susceptible de représenter la fonction f.

2. Déterminer, pour tout $x \in [-3\,;4]$, le signe de $f(x)$ en fonction de x.

Exercice 3. On considère la fonction $f : x \longmapsto x(1-x)$ définie sur $\mathbb{R}$.

1. Calculer $f(\frac{1}{2})$.

2. Montrer que, pour tout réel x, $f(\frac{1}{2}) - f(x) = (\frac{1}{2} - x)^2$.

3. En déduire le maximum de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4. On considère la fonction $f : x \longmapsto \frac{x}{x^2+1}$ définie sur $\mathbb{R}$.

1. Calculer $f(-1)$ et $f(1)$.

2. **a.** Montrer que, pour tout réel x, $f(x) - f(-1) = \frac{(x+1)^2}{2(x^2+1)}$.

b. Déterminer le minimum de f sur $\mathbb{R}$.

3. Montrer que $f(1)$ est le maximum de f sur $\mathbb{R}$.