Comparer deux nombres réels

Définition 1

Comparer (au sens strict) deux nombres réels a et b, c'est déterminer si $a = b$, $a < b$ ou $a > b$.

Parfois, on se contentera simplement d'une comparaison du type $a \leqslant b$ ou $a \geqslant b$. Dans ce cas, on parle de comparaison au sens large.

Remarque 2. Si deux réels a et b vérifient $a < b$ alors ils vérifient aussi $a \leqslant b$. Ainsi, on peut écrire $2 < 3$ mais aussi $2 \leqslant 3$.

Propriété 3

Soit a et b deux réels.

1. Si $a < 0$ et $b \geqslant 0$ alors $a < b$.

2. Si $a < b$ alors $-a > -b$.

Remarque 4. De même, si $a \leqslant b$ alors $-a \geqslant -b$.

Exemple 5. $1 < 2$ donc $-1 > -2$.

Grâce à cette propriété, on voit qu'on peut se contenter de donner des critères pour comparer des nombres positifs.

I. — Comparer deux nombres décimaux positifs

Propriété 6

Soit a et b deux décimaux positifs différents.

1. Si la partie entière de a est strictement inférieure à celle de b alors $a < b$.

2. Si la partie entière de a est égale à celle b alors on compare une à une les décimales de a et b (les dixièmes puis les centièmes puis les millièmes...). Le plus grand est alors celui qui a la première décimale la plus grande.

Exemple 7.

1. $12{,}54 < 13{,}2$ car $12 < 13$. **2.** $3{,}1\underline{2}4 < 3{,}1\underline{3}1$ car $2 < 3$. **3.** $6{,}00\underline{2} > 6{,}00\underline{1}9$ car $2 > 1$.

4. $-2{,}13 > -2{,}15$ car $3 < 5$ donc $2{,}1\underline{3} < 2{,}1\underline{5}$ et on utilise ensuite la propriété 3.

II. — Comparer deux nombres rationnels positifs

Propriété 8

On considère deux rationnels positifs écrits sous forme de fractions.

1. Si les deux fractions ont le même numérateur, la plus grande est celle qui a le plus petit dénominateur.

2. Si les deux fractions ont le même dénominateur, la plus grande est celle qui a le plus grand numérateur.

Exemple 9.

1. $\frac{3}{5} < \frac{3}{4}$ car $5 > 4$ **2.** $\frac{4}{7} > \frac{3}{7}$ car $4 > 3$ **3.** $\frac{2}{3} < \frac{5}{6}$ car $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ et $4 < 5$.

4. $\frac{1}{7} < \frac{2}{13}$ car $\frac{1}{7} = \frac{2}{14}$ et $14 > 13$.

III. — Comparer deux nombres réels

Méthode 10

Pour comparer deux réels quelconques a et b, on peut étudier le signe de $b - a$.

1. Si $b - a > 0$ alors $b > a$;
2. si $b - a < 0$ alors $b < a$;
3. si $b - a = 0$ alors $b = a$.

Exemple 11. Comparer $a = \frac{7}{8}$ et $b = \frac{6}{7}$.

Méthode 12

Pour comparer deux réels strictement positifs a et b, on peut comparer le quotient $\frac{b}{a}$ avec 1.

1. Si $\frac{b}{a} > 1$ alors $b > a$;
2. si $\frac{b}{a} < 1$ alors $b < a$;
3. si $\frac{b}{a} = 1$ alors $b = a$.

Exemple 13. Comparer $a = 3^{2018} \times 10^{2020}$ et $b = 30^{2019}$.

Méthode 14

Pour comparer deux réels a et b, on peut les comparer à un même troisième réel c. Si $a < c$ et $c < b$ alors $a < b$.

Exemple 15. Comparer $a = \pi - 1$ et $b = \sqrt{2}$.

IV. — Exercices

Exercice 16. Dans chaque cas, comparer a et b sans utiliser la calculatrice.

1. $a = 0{,}014$ et $b = 0{,}05$ **2.** $a = -12{,}4$ et $b = -14{,}05$ **3.** $a = 2{,}13 \times 10^{-3}$ et $b = 0{,}00205$
4. $a = \frac{7}{6}$ et $b = \frac{7}{3}$ **5.** $a = \frac{8}{9}$ et $b = \frac{7}{9}$ **6.** $a = \frac{3}{8}$ et $b = \frac{1}{3}$ **7.** $a = \frac{2}{5}$ et $b = \frac{11}{25}$
8. $a = -\frac{3}{7}$ et $b = -\frac{5}{7}$ **9.** $a = -\frac{1}{4}$ et $b = -\frac{4}{15}$ **10.** $a = -\frac{13}{12}$ et $b = -\frac{7}{6}$
11. $a = -\frac{5}{7}$ et $b = -\frac{2}{3}$ **12.** $a = 0{,}12$ et $b = \frac{12}{101}$ **13.** $a = 0{,}07$ et $b = \frac{2}{25}$

Exercice 17. Soit x un réel. On pose $A = (x+1)^2$ et $B = 2x+1$. Calculer $A-B$ puis comparer A et B.

Exercice 18. Dans chaque cas, sans utiliser la calculatrice, calculer $\frac{a}{b}$ puis comparer a et b.

1. $a = 10^{20}$ et $b = 10^{21}$ **2.** $a = \left(\frac{1}{3}\right)^{12}$ et $b = \left(\frac{1}{3}\right)^{13}$ **3.** $a = \frac{5}{4^7}$ et $b = \frac{1}{4^8}$.

Exercice 19. Dans chaque cas, comparer a et b sans utiliser la calculatrice.

1. $a = 10\pi$ et $b = 31{,}4$ **2.** $a = 2\sqrt{2}$ et $b = 3$ **3.** $a = \pi$ et $b = \frac{10}{3}$

Exercice 20. Soit t un réel positif. On pose $A = (t+2)^2$ et $B = (t+3)(t+1)$. Calculer $A - B$ puis comparer A et B.

Exercice 21.

1. Soit u et v deux réels. Comparer $u^2 + v^2$ et $2uv$.
2. En déduire que, pour tous réels x, y et z, $xy + yz + zx \leqslant x^2 + y^2 + z^2$.

Exercice 22. Soit $n \in \mathbb{N}$. Comparer $a = \frac{n}{n+1}$ et $b = \frac{n+1}{n+2}$.

Exercice 23. Soit x et y deux réels strictement positifs. Comparer $\frac{1}{x+y}$ et $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$.