

Problèmes conduisant à des études de fonctions

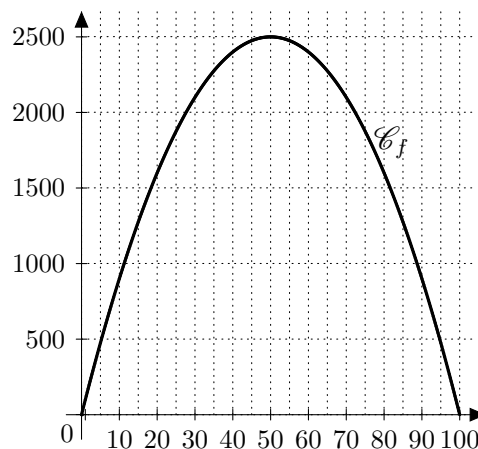
Exercice 1. — Sur un terrain, on veut construire un enclos rectangulaire pour du bétail. Pour cela, on dispose de 200 mètres de grillage. Le but de l'exercice est déterminer la façon de clôturer qui permet d'obtenir un enclos de surface maximale.

1. Expliquer pourquoi le problème se ramène à étudier la fonction f définie sur $[0 ; 100]$ par

$$f(x) = -x^2 + 100x.$$

Un schéma sera particulièrement bienvenu.

2. On a tracé sur la figure ci-contre la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction f . Conjecturer le maximum de f sur $[0 ; 100]$ ainsi que la valeur en laquelle ce maximum est atteint.
3. Démontrer, par le calcul, la conjecture précédente.
4. Avec les contraintes de l'énoncé, préciser la forme et les dimensions de l'enclos dont la surface est maximale.



Exercice 2. — Le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J) . On considère le point A de coordonnées $(1 ; 2)$. Pour tout réel $x > 1$, on note P_x le point de coordonnées $(x ; 0)$ et Q_x le point de l'axe des ordonnées tel que les points P_x , A et Q_x soient alignés. Le but du problème est de déterminer la valeur de x pour que l'aire du triangle OP_xQ_x soit minimale.

1. Illustrer l'énoncé par une figure en prenant $x = 3$.
2. En utilisant le théorème de Thalès, démontrer que, pour tout réel $x \in]1 ; +\infty[$, l'ordonnée du point Q_x est $\frac{2x}{x-1}$.
3. On note f la fonction qui, à tout réel $x \in]1 ; +\infty[$, associe l'aire du triangle OP_xQ_x .
Déduire de la question précédente que, pour tout $x \in]1 ; +\infty[$, $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$.
4. Tracer la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction f sur l'écran d'une calculatrice graphique.
5. Conjecturer, à partir de cette courbe, le minimum de f et la valeur de x cherchée.
6. Démontrer que, pour tout $x \in]1 ; +\infty[$, $f(x) - f(2) = \frac{(x-2)^2}{x-1}$.
7. Démontrer la conjecture de la question 6 et conclure.