

Corrigé du devoir commun de mathématiques

Exercice 1

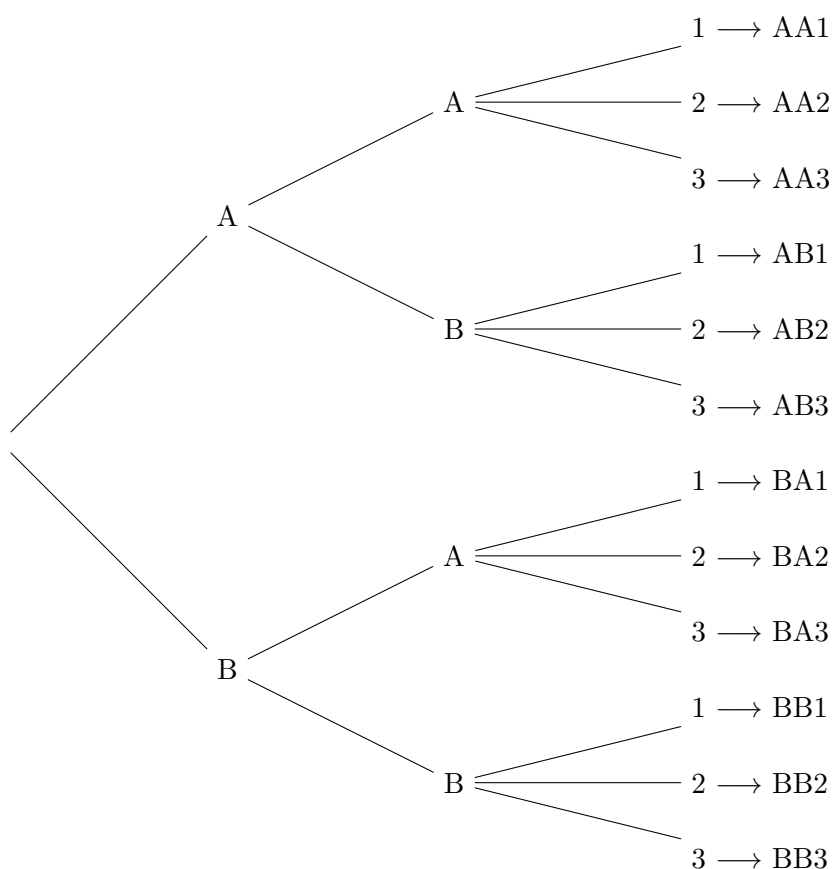
- Graphiquement, $f(0) = 1$ et $g(0) = 3$.
- Graphiquement, les antécédents de 1 par f sont $-1,7$, 0 et $1,7$.
- Graphiquement, l'ensemble des solutions de l'équation $g(x) = 3$ est $\{-1; 0\}$.
- Le tableau de variation de la fonction f sur $[-2,5; 2]$ est :

x	$-2,5$	-1	1	2
Variation de f	$-7,1$	3	-1	3

- Graphiquement, l'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ est $\{-2; -1; 1\}$.
- Graphiquement, l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) > g(x)$ est $] -2; -1[\cup]1; 2]$.

Exercice 2

1.



- On déduit de l'arbre qu'il y a 12 codes différents possibles.
Dans la suite, on modélise le choix au hasard d'un code par l'équiprobabilité P sur l'ensemble des ces 12 codes.
- a. Comme $E = \{AB1; AB2; AB3; BA1; BA2; BA3\}$, $P(E) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$.

- b. Comme $F = \{AA1; AA2; AA3\}$, $\boxed{P(F) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}}$.
4. a. Comme $G = E \cup F$ et comme E et F sont incompatibles, $P(G) = P(E) + P(F) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ donc $\boxed{P(G) = \frac{3}{4}}$.
- D'autre part, $H = \{AA2; AB2; BA2; BB2\}$ donc $\boxed{P(H) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}}$.
- b. $G \cap H$: « le code contient la lettre A au moins une fois et finit par un chiffre pair ».
- Ainsi, $G \cap H = \{AA2; AB2; BA2\}$ donc $\boxed{P(G \cap H) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}}$.
5. Par propriété, $P(\overline{G}) = 1 - P(G) = 1 - \frac{3}{4}$ donc $\boxed{P(\overline{G}) = \frac{1}{4}}$ et
- $$P(G \cup H) = P(G) + P(H) - P(G \cap H) = \frac{3}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$
- i.e. $\boxed{P(G \cup H) = \frac{5}{6}}$.

Exercice 3

1. Comme M varie sur $[AD]$, la longueur $x = AM$ varie entre 0 et 40 mètres donc $\boxed{I = [0; 40]}$.
2. a. Comme BNP est isocèle en P , $PB = PN = AM = x$ donc, comme $AP = AB - PB$, $\boxed{AP = 60 - x}$.
- b. On en déduit que l'aire du rectangle $APNM$ est $S(x) = AP \times AM = (60 - x) \times x$ c'est-à-dire $\boxed{S(x) = 60x - x^2}$ (forme 1).
- c. Soit $x \in I$. Alors,

$$900 - (x - 30)^2 = 900 - (x^2 - 60x + 900) = 900 - x^2 + 60x - 900 = 60x - x^2$$

donc, d'après la question précédente, $\boxed{S(x) = 900 - (x - 30)^2}$. (forme 2).

3. a. Utilisons la forme 2 :

$$\begin{aligned} S(x) = 800 &\Leftrightarrow 900 - (x - 30)^2 = 800 \Leftrightarrow 900 - 800 - (x - 30)^2 = 0 \Leftrightarrow 100 - (x - 30)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow 10^2 - (x - 30)^2 = 0 \Leftrightarrow [10 - (x - 30)][10 + (x - 30)] = 0 \\ &\Leftrightarrow (10 - x + 30)(10 + x - 30) = 0 \Leftrightarrow (40 - x)(x - 20) = 0 \\ &\Leftrightarrow 40 - x = 0 \text{ ou } x - 20 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 40 \text{ ou } x = 20 \end{aligned}$$

Ainsi, l'aire de la surface grisée est égale à 800 m² si et seulement si M est en D ou au milieu de $[AD]$.

- b. Comme le triangle PBN est isocèle rectangle en P , son aire est $\frac{1}{2} \times PB^2 = \frac{x^2}{2}$. Utilisons la forme 1 :

$$\begin{aligned} S(x) = \frac{x^2}{2} &\Leftrightarrow 60x - x^2 = \frac{x^2}{2} \Leftrightarrow 120x - 2x^2 = x^2 \Leftrightarrow 120x - 3x^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow 3x(40 - x) = 0 \\ &\Leftrightarrow 3x = 0 \text{ ou } 40 - x = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 40 \end{aligned}$$

Ainsi, l'aire de la surface grisée est égale à celle du triangle PBN si et seulement si $M = A$ ou $M = D$.

4. Pour tout $x \in I$, en utilisant la forme 2,

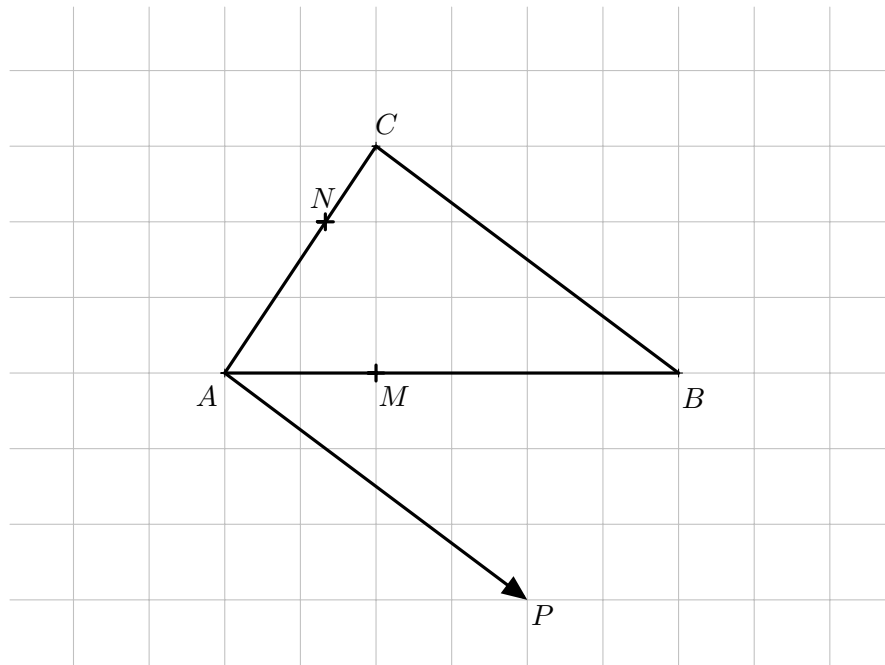
$$900 - S(x) = 900 - (900 - (x - 30)^2) = 900 - 900 + (x - 30)^2 = (x - 30)^2.$$

Or, le carré d'un réel est un nombre positif donc $900 - S(x) \geq 0$ c'est-à-dire $\boxed{S(x) \leq 900}$.

De plus, $S(x) = 900$ si et seulement si $(x - 30)^2 = 0$ c'est-à-dire $x = 30$. Ainsi, l'unique valeur de x telle que $S(x) = 900$ est 30.

Exercice 4

1.



2. Puisque $\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$, d'après la règle du parallélogramme, ACBP est un parallélogramme.
3. Grâce à la relation de Chasles,

$$\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{CA}$$

et donc $\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$.

4. De même,

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} = -\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}$$

donc, par hypothèse, $\overrightarrow{MN} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

5. On déduit des questions précédentes que $\overrightarrow{MN} = -\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}) = -\frac{1}{3}\overrightarrow{CP}$. Ainsi, les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Par théorème, on conclut que les droites (MN) et (CP) sont parallèles.

Exercice 5 (Sujet A)

1. Réponse b).

En effet, pour tout réel x , $9x^2 - 4 = (3x)^2 - 2^2 = (3x - 2)(3x + 2)$.

2. Réponse d)

En effet, pour tout réel x ,

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow 3 - x^2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3}^2 - x^2 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{3} - x)(\sqrt{3} + x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{3} - x = 0 \text{ ou } \sqrt{3} + x = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{3} \text{ ou } x = -\sqrt{3}. \end{aligned}$$

3. Réponse c).

En effet, pour tous réels a et b , $(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 - a^2b + ab^2 + a^2b - ab^2 + b^3 = a^3 + b^3$.

4. Réponse c)

En effet, à l'entrée de l'instruction conditionnelle, A vaut 2 et B vaut -1 donc la condition $(A > B)$ est vraie et ainsi A prend la valeur $2 - (-1) = 3$.

Exercice 5 (Sujet B)

1. Réponse C).

En effet, pour tout réel x , $4x^2 - 9 = (2x)^2 - 3^2 = (2x - 3)(2x + 3)$.

2. Réponse G)

En effet, pour tout réel x ,

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow 5 - x^2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{5}^2 - x^2 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{5} - x)(\sqrt{5} + x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{5} - x = 0 \text{ ou } \sqrt{5} + x = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{5} \text{ ou } x = -\sqrt{5}. \end{aligned}$$

3. Réponse J).

En effet, pour tous réels a et b , $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 + a^2b + ab^2 - a^2b - ab^2 - b^3 = a^3 - b^3$.

4. Réponse N)

En effet, à l'entrée de l'instruction conditionnelle, A vaut 2 et B vaut -1 donc la condition $(A > B)$ est vraie et ainsi A prend la valeur $-1 - 2 = -3$.