

Correction du devoir surveillé n°3

Exercice 1

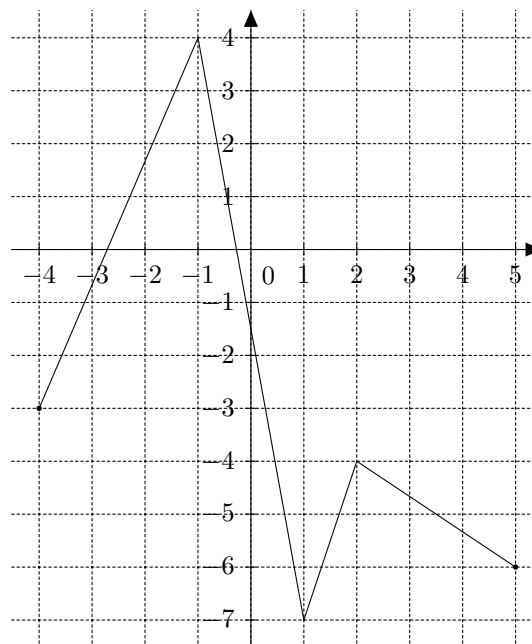
1. L'ensemble de définition de f est $D = [-4; 5]$.
2. Graphiquement, l'image de -3 par f est 3.
3. Graphiquement, $f(-1) = 0$.
4. Graphiquement, les antécédents de 2 par f sont environ $-3,5$, $-2,5$ et 4.
5. Graphiquement, l'ensemble des solutions de $f(x) = 1$ est $\{-4; -2; 2; 5\}$.
6. Le tableau de variation de f sur D est :

x	-4	-3	0	4	5
Variation de f	1	3	-3	2	1

7. Graphiquement, $f(1) = -1$. Or, $1 \geq 0$ et $f(-1) < 0$ donc l'affirmation est fausse.

Exercice 2

1. a) La fonction f est strictement croissante sur $[-4; -1]$ et $-3 < -2$ donc $f(-3) < f(-2)$.
 b) La fonction f est strictement décroissante sur $[2; 5]$ et $3 < 4$ donc $f(3) > f(4)$.
 c) La fonction f est strictement croissante sur $[-4; -1]$ et $-4 < -2$ donc $f(-4) < f(-2)$ c'est-à-dire $-3 < f(-2)$. Par ailleurs, la fonction f est strictement décroissante sur $[2; 5]$ et $2 < 4$ donc $f(2) > f(4)$ c'est-à-dire $-4 > f(4)$. Ainsi, $f(4) < -4 < -3 < f(-2)$ donc $f(-2) > f(4)$.
2. a. Le maximum de f sur $[-4; 5]$ est 4 et il est atteint en -1 .
 b. Sur $[-4; 5]$, la fonction f atteint son minimum en 1 et ce minimum vaut -7 .
 c. Le minimum de f sur $[2; 5]$ est -6 et il est atteint en 5.
3. Voici une courbe susceptible de représenter la fonction f .



Exercice 3

1. $f(1) = 2 - 1 = 1$ et $f(-1,5) = 2 - (-1,5) = 2 + 1,5 = 3,5$.
2. Chercher les antécédents de -2 par f revient à résoudre $f(x) = -2$. Or,

$$f(x) = -2 \Leftrightarrow 2 - x = -2 \Leftrightarrow 2 + 2 = x \Leftrightarrow 4 = x$$

donc l'unique antécédent de -2 par f est 4 .

3. D'une part, $x_A \in D_f$ car $D_f = \mathbb{R}$ et, d'autre part, $f(x_A) = f(-2) = 2 - (-2) = 2 + 2 = 4 \neq y_A$ donc A n'appartient pas à la courbe représentative de f .
D'une part, $x_B \in D_f$ car $D_f = \mathbb{R}$ et, d'autre part, $f(x_B) = f(2) = 2 - 2 = 0 = y_B$ donc B appartient à la courbe représentative de f .

Exercice 4

1. Par définition $AM = x$, $AN = AD - DN = 4 - x$ donc l'aire du rectangle $AMPN$ est $x(4 - x) = 4x - x^2 = -x^2 + 4x$. Par ailleurs, comme $M \in AB$, $x \in [0; 4]$. Ainsi, le problème revient à déterminer $x \in [0; 4]$ tel que $-x^2 + 4x$ soit maximal ce qui revient à déterminer le maximum de la fonction f définie sur $[0; 4]$ par $f(x) = -x^2 + 4x$.
2. En utilisant la courbe de l'énoncé, on conjecture que le maximum de f sur $[0; 4]$ est 4 et qu'il est atteint en $x = 2$.
3. Soit $x \in [0; 4]$. Alors,

$$f(2) - f(x) = -2^2 + 4 \times 2 - (-x^2 + 4x) = 4 + x^2 - 4x = x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$$

donc, comme le carré d'un réel est positif, $f(2) - f(x) \geq 0$ c'est-à-dire $f(2) \geq f(x)$. On a ainsi démontré que le maximum de f sur $[0; 4]$ est atteint en $x = 2$ et vaut $f(2) = 4$.

Ainsi, il faut choisir M de telle sorte que $x = 2$. Autrement dit, l'aire de $AMPN$ est maximale lorsque M est le milieu de $[AB]$ (et alors $AMPN$ est un carré).