

Correction du devoir surveillé n°1

Exercice 1.

$$A = a^3 b^{-1} a^2 b^3 = a^{3+2} b^{-1+3} \text{ donc } \boxed{A = a^5 b^2}$$

$$B = \frac{a^4 b^{-2}}{a^{-1} b} = a^{4-(-1)} b^{-2-1} \text{ donc } \boxed{B = a^5 b^{-3}}$$

$$C = \frac{1}{ab^2} \times (ab)^3 = a^{-1} b^{-2} a^3 b^3 = a^{-1+3} b^{-2+3} \text{ donc } \boxed{C = a^2 b^1}$$

$$D = \frac{(a^3 b)^2}{a^{-5} b^3} = \frac{a^{3 \times 2} b^2}{a^{-5} b^3} = a^{6-(-5)} b^{2-3} \text{ donc } \boxed{D = a^{11} b^{-1}}.$$

Exercice 2.

$$A = \sqrt{75} = \sqrt{25 \times 3} = \sqrt{25} \times \sqrt{3} \text{ donc } \boxed{A = 5\sqrt{3}}$$

$$B = \sqrt{200} = \sqrt{100 \times 2} = \sqrt{100} \times \sqrt{2} \text{ donc } \boxed{B = 10\sqrt{2}}$$

$$C = \sqrt{8} + \sqrt{18} + \sqrt{50} = \sqrt{4 \times 2} + \sqrt{9 \times 2} + \sqrt{25 \times 2} = \sqrt{4} \times \sqrt{2} + \sqrt{9} \times \sqrt{2} + \sqrt{25} \times \sqrt{2} \\ = 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} + 5\sqrt{2}$$

$$\text{donc } \boxed{C = 11\sqrt{2}}.$$

Exercice 3.

1. a. Pour développer, on utilise la distributivité. Ainsi, pour tout réel x ,

$$P(x) = (2x + 7)(x - 1) - 4(x - 1) = 2x^2 - 2x + 7x - 7 - 4x + 4$$

$$\text{soit } \boxed{P(x) = 2x^2 + x - 3}.$$

- b. Pour factoriser, on reconnaît le facteur commun $x - 1$. Dès lors, pour tout réel x ,

$$P(x) = (2x + 7)(x - 1) - 4(x - 1) = (x - 1) [(2x + 7) - 4]$$

$$\text{soit } \boxed{P(x) = (x - 1)(2x + 3)}.$$

- c. On peut vérifier la cohérence des résultats précédents en développant la forme factorisée. Cela donne : $(x - 1)(2x + 3) = 2x^2 + 3x - 2x - 3 = 2x^2 + x - 3$ et on retrouve donc bien la forme développée.

2. a. Pour calculer $P(0)$, on utilise la forme développée qui donne : $P(0) = 2 \times 0^2 + 0 - 3$ soit $\boxed{P(0) = -3}$.

- b. Pour résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$, on utilise la forme factorisée qui donne :

$$P(x) = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(2x + 3) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \text{ ou } 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = -\frac{3}{2}$$

$$\text{Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation } P(x) = 0 \text{ est } \boxed{\left\{-\frac{3}{2}; 1\right\}}.$$

Exercice 4.

• Pour résoudre (E_1) , commençons par factoriser en utilisant les identités remarquables pour se ramener à une équation « produit nul » :

$$\begin{aligned}
 (E_2) \quad (x+2)^2 &= (2x-1)^2 \Leftrightarrow (x+2)^2 - (2x-1)^2 = 0 \\
 &\Leftrightarrow [(x+2) - (2x-1)][(x+2) + (2x-1)] = 0 \\
 &\Leftrightarrow (x+2-2x+1)(x+2+2x-1) = 0 \\
 &\Leftrightarrow (-x+3)(3x+1) = 0 \\
 &\Leftrightarrow -x+3 = 0 \text{ ou } 3x+1 = 0 \\
 &\Leftrightarrow x = 3 \text{ ou } x = -\frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation (E_2) est $\left\{-\frac{1}{3}; 3\right\}$.

• Pour résoudre (E_2) , on factorise en reconnaissant successivement une identité remarquable et un facteur commun :

$$\begin{aligned}
 (E_2) &\Leftrightarrow \underline{(x+1)}(3x-4) + \underline{(x+1)}(x-1) = 0 \\
 &\Leftrightarrow (x+1)[(3x-4) + (x-1)] = 0 \\
 &\Leftrightarrow (x+1)(3x-4+x-1) = 0 \\
 &\Leftrightarrow (x+1)(4x-5) = 0 \\
 &\Leftrightarrow x+1 = 0 \text{ ou } 4x-5 = 0 \\
 &\Leftrightarrow x = -1 \text{ ou } x = \frac{5}{4}
 \end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation (E_2) est $\left\{-1; \frac{5}{4}\right\}$.

• $(E_3) \quad \frac{x^2-9}{x+3} = 0$ est une équation « quotient nul ».

Cette équation a un sens si et seulement si $x+3 \neq 0$ c'est-à-dire $x \neq -3$.

Alors, pour tout $x \neq -3$,

$$(E_3) \Leftrightarrow x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow (x-3)(x+3) = 0 \Leftrightarrow x-3 = 0 \text{ ou } x+3 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \text{ ou } x = -3.$$

Or, comme $x \neq -3$, l'ensemble des solutions de l'équation (E_3) est $\{3\}$.

Exercice 5.

1. $A(1) = \frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{2}$ et $B(1) = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ donc $A(1) = B(1)$. On conclut qu'il existe au moins un réel x différent de 0 et -1 tel que $A(x) = B(x)$ donc l'affirmation est vraie.

2. Pour tout x différent 0 et -1 ,

$$B(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{x+1}{x(x+1)} - \frac{x}{x(x+1)} = \frac{x+1-x}{x(x+1)} = \frac{1}{x(x+1)} = A(x)$$

donc, pour tout réel x différent de 0 et -1 , $A(x) = B(x)$. Ainsi, l'affirmation est vraie.

Exercice 6. Considérons l'équation $(E) : (x-1)(x-2)(x-3) = 0$. Alors,

$$(E) \Leftrightarrow x-1 = 0 \text{ ou } x-2 = 0 \text{ ou } x-3 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = 2 \text{ ou } x = 3$$

donc l'ensemble des solutions de (E) est $\{1; 2; 3\}$ donc l'équation (E) répond à la question.

Exercice 7.

1. En remarquant que $x^4 = (x^2)^2$ et que $1 = 1^2$, il vient

$$x^4 - 1 = (x^2)^2 - 1^2 = (x^2 - 1)(x^2 + 1) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$$

donc

$$\begin{aligned}x^4 - 1 = 0 &\Leftrightarrow (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1) = 0 \\&\Leftrightarrow x - 1 = 0 \text{ ou } x + 1 = 0 \text{ ou } x^2 + 1 = 0 \\&\Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = -1 \text{ ou } x^2 = -1.\end{aligned}$$

Comme le carré d'un réel est toujours positif, l'équation $x^2 = -1$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$ et donc l'ensemble des solutions de $x^4 - 1 = 0$ est $\{-1; 1\}$.

2. Pour tout réel x ,

$$(x - 1)(x^3 + x^2 + x + 1) = x^4 + x^3 + x^2 + x - x^3 - x^2 - x - 1$$

donc, après simplification, $(x - 1)(x^3 + x^2 + x + 1) = x^4 - 1$.

3. Supposons que x est une solution de $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$. Alors,

$$x^4 - 1 = (x - 1)(x^3 + x^2 + x + 1) = (x - 1) \times 0 = 0$$

donc x est aussi solution de $x^4 - 1 = 0$. D'après la question 1, on en déduit que $x = 1$ ou $x = -1$. Or, $1^3 + 1^2 + 1 + 1 = 4 \neq 0$ et $(-1)^4 + (-1)^3 + (-1)^2 + (-1) = 1 - 1 + 1 - 1 = 0$ donc -1 est solution de $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$. On conclut que l'ensemble des solutions de $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ est $\{-1\}$.