

Devoir surveillé n°1

Durée : 1 heure

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Exercice 1 (2 points). — Soit a et b deux réels non nuls. Écrire les nombres suivants sous la forme $a^n b^m$ où n et m sont des entiers relatifs.

$$A = a^3 b^{-1} a^2 b^3 \quad B = \frac{a^4 b^{-2}}{a^{-1} b} \quad C = \frac{1}{ab^2} \times (ab)^3 \quad D = \frac{(a^3 b)^2}{a^{-5} b^3}$$

Exercice 2 (2 points). — Écrire les nombres suivants sous la forme $a\sqrt{b}$ où a et b sont deux nombres entiers naturels et b est le plus petit possible. On détaillera les étapes du calcul.

$$A = \sqrt{75} \quad B = \sqrt{200} \quad C = \sqrt{8} + \sqrt{18} + \sqrt{50}$$

Exercice 3 (4 points). — Pour tout réel x , on pose

$$P(x) = (2x + 3)(x - 2) - (2x + 3)(5x + 1).$$

1.
 - a. Déterminer la forme développée, réduite et ordonnée selon les puissances décroissantes de $P(x)$.
 - b. Déterminer la forme factorisée de $P(x)$.
2. En utilisant la forme de $P(x)$ qui vous semble la mieux adaptée :
 - a. calculer $P(0)$;
 - b. résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$.

Exercice 4 (6 points). — Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

$$(E_1) : (x + 2)^2 = (2x - 1)^2 \quad (E_2) : (x + 1)(3x - 4) + x^2 - 1 = 0 \quad (E_3) : \frac{x^2 - 9}{x + 3} = 0.$$

Exercice 5 (4 points). — Pour tout réel x différent de 0 et -1 , on pose

$$A(x) = \frac{1}{x(x + 1)} \quad \text{et} \quad B(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x + 1}.$$

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant sa réponse.

1. Il existe au moins un réel x différent de 0 et -1 tel que $A(x) = B(x)$.
2. Pour tout réel x différent de 0 et -1 , $A(x) = B(x)$.

Exercice 6 (2 points). — Déterminer une équation dont l'ensemble des solutions est $\{1; 2; 3\}$. (On justifiera sa réponse avec soin.)

Exercice 7 (facultatif).

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^4 - 1 = 0$.
2. Démontrer que, pour tout réel x , $(x - 1)(x^3 + x^2 + x + 1) = x^4 - 1$.
3. Dédire des questions précédentes l'ensemble des solutions de l'équation $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$.