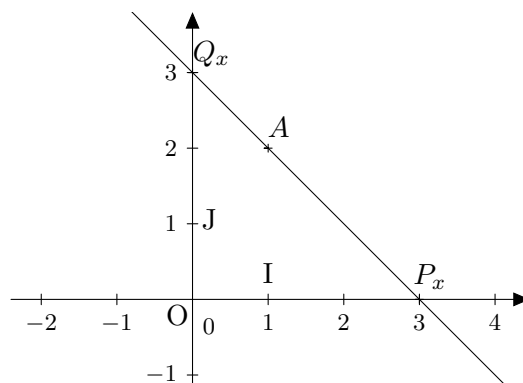


Correction du devoir à la maison n°5

1. Pour $x = 3$, on obtient la figure suivante.



2. Soit $x > 1$. Alors, les points P_x , I et O, d'une part, et P_x , A et Q_x , d'autre part, sont alignés dans cet ordre. De plus, comme le repère est orthogonal, les droites OQ_x et IA sont perpendiculaires à l'axe des abscisses dont elles sont parallèles entre elles. On peut donc appliquer le théorème de Thalès qui assure que $\frac{P_x I}{P_x O} = \frac{IA}{OQ_x}$. Ainsi,

$$OQ_x = \frac{P_x O \times IA}{P_x I} = \frac{x \times 2}{(x-1)} = \frac{2x}{x-1}.$$

On conclut donc que l'ordonnée de Q_x est $\frac{2x}{x-1}$.

3. Soit $x > 1$. Comme le triangle $OP_x Q_x$ est rectangle en O, son aire est

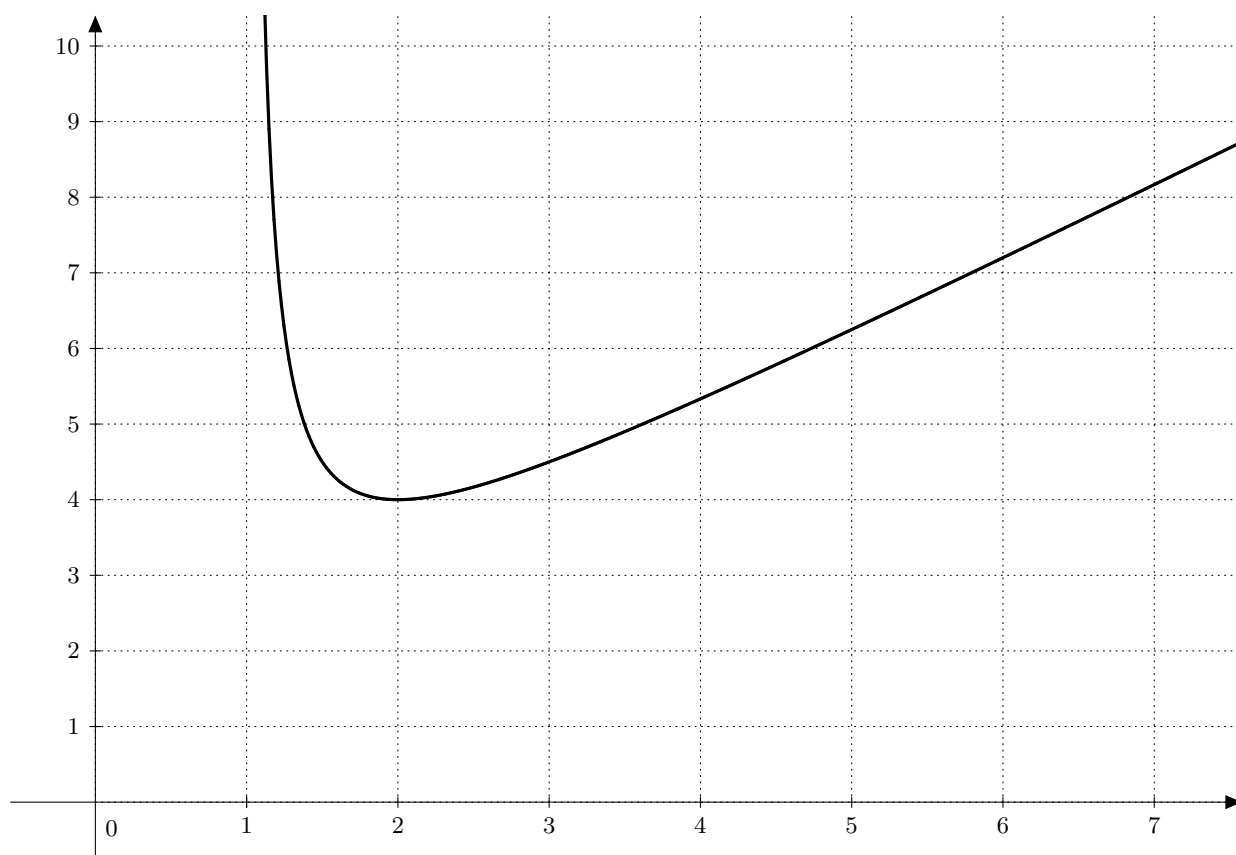
$$f(x) = \frac{OP_x \times OQ_x}{2} = \frac{x \times \frac{2x}{x-1}}{2} = \frac{2x^2}{2(x-1)} = \frac{x^2}{x-1}.$$

On a donc montré que, pour tout $x \in]1; +\infty[$, $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$.

4. Voir la courbe sur la page suivante.
 5. À partir de la courbe de f , on peut conjecturer que le minimum de f est 4 et qu'il est atteint en 2.
 6. Pour tout réel $x > 1$,

$$f(x) - f(2) = \frac{x^2}{x-1} - 4 = \frac{x^2 - 4(x-1)}{x-1} = \frac{x^2 - 4x + 4}{x-1} = \frac{x^2 - 2 \times 2 \times x + 2^2}{x-1} = \frac{(x-2)^2}{x-1}.$$

Ainsi, on a bien démontré que, pour tout $x \in]1; +\infty[$, $f(x) - f(2) = \frac{(x-2)^2}{x-1}$.



7. Pour tout réel $x > 1$, $(x - 2)^2 \geq 0$ et $x - 1 > 0$ donc $\frac{(x - 2)^2}{x - 1} \geq 0$ c'est-à-dire $f(x) - f(2) \geq 0$ et ainsi $f(x) \geq f(2)$.

On conclut donc que f atteint son minimum sur $]1; +\infty[$ en 2 et que ce minimum vaut $f(2) = 4$.

Ainsi, on a montré que l'aire du triangle OP_xQ_x est minimale si $x = 2$.