

Devoir à la maison n°4
À rendre le mercredi 11 décembre 2019

On considère deux réels a et b tels que $0 < a < b$.

On pose

$$m = \frac{a+b}{2} \qquad g = \sqrt{ab} \qquad h = \frac{2ab}{a+b}.$$

On dit que :

- m est la moyenne arithmétique de a et b ;
- g est la moyenne géométrique de a et b ;
- h est la moyenne harmonique de a et b .

Le but de l'exercice est de comparer, de deux façons différentes, les nombres m , g et h .

1. Un exemple

Dans cette question, et dans cette question seulement, on suppose que $a = \frac{1}{2}$ et $b = 4$.

- a. Calculer m , g et h .
- b. Comparer m , g et h sans utiliser la calculatrice.

Dans toute la suite, a et b sont des réels quelconques tels que $0 < a < b$.

2. Méthode géométrique

On considère trois points A, B et C alignés dans cet ordre tels que $AB = a$ et $BC = b$.

On note :

- O le milieu de $[AC]$;
- $\mathcal{C}$ un demi-cercle de diamètre $[AC]$;
- D le point d'intersection de la perpendiculaire à (AC) passant par B avec le demi-cercle $\mathcal{C}$;
- H le point d'intersection de la perpendiculaire à (OD) passant par B avec (OD) .

- a. Faire une figure en plaçant tous les éléments de l'énoncé.
- b. Montrer que $OD = m$.
- c. Calculer OB et en déduire que $BD = g$.
- d. En exprimant l'aire du triangle OBD de deux façons différentes, montrer que

$$BH = \frac{b-a}{a+b} \sqrt{ab}$$

et en déduire que $DH = h$.

- e. Déduire des questions précédentes, en utilisant des arguments géométriques, que $h < g < m$.

3. Méthode algébrique

On se propose de retrouver le résultat de la question **2.e.** par une méthode algébrique.

- a. Montrer que

$$m - g = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{2}$$

et en déduire que $m > g$.

- b. Montrer que

$$\frac{g}{h} = \frac{m}{g}$$

et en déduire que $g > h$.