

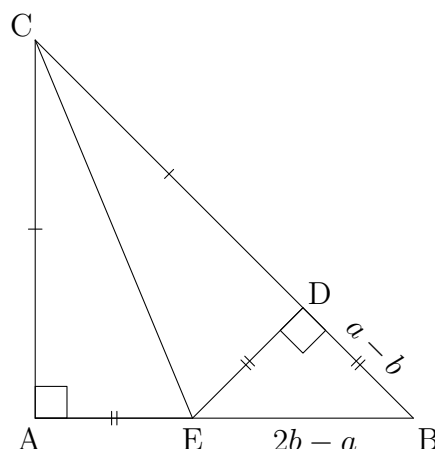
Correction du devoir à la maison n°1

1. D'après le théorème de Pythagore,

$$QR^2 = QP^2 + PR^2 = q^2 + q^2 = 2q^2$$

donc, comme $q > 0$, $QR = \sqrt{2q^2} = \sqrt{2} \times \sqrt{q^2} = \sqrt{2} \times q$. Or, par hypothèse, $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ donc $QR = \frac{p}{q} \times q$ donc $\boxed{QR = p}$.

2. a.



- b. Par hypothèse, les droites (BC) et (DE) sont perpendiculaires donc (BDE) est rectangle en D.

Comme ABC est rectangle et isocèle en A, $\widehat{ABC} = 45^\circ$. Dès lors, dans le triangle BDE :

$$\widehat{DEB} = 180^\circ - (\widehat{EBD} + \widehat{BDE}) = 180^\circ - (90^\circ + 45^\circ) = 45^\circ$$

Ainsi, $\widehat{DEB} = \widehat{EBD}$ donc BDE est isocèle en D.

On conclut que $\boxed{\text{le triangle BDE est rectangle isocèle en D.}}$

- c. Par hypothèse, $CD = CA = b$ et $BD = a$ donc $BD = CB - CD = a - b$. Or, a et b sont des entiers donc $a - b$ aussi. Ainsi, $\boxed{\text{la longueur BD est un entier.}}$
- d. En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle AEC rectangle en A, il vient

$$AE^2 = CE^2 - AC^2 = CE^2 - b^2$$

et, en appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle CDE rectangle en D, on obtient

$$DE^2 = CE^2 - CD^2 = CE^2 - b^2$$

donc $AE^2 = DE^2$ et, comme ce sont des longueurs donc des nombres positifs, $AE = DE$. Or, comme BDE est isocèle en D, $DE = BD = a - b$ d'après la question précédente. Ainsi, $\boxed{AE = a - b}$.

On en déduit que $BE = AB - AE = b - (a - b) = 2b - a$ donc, comme a et b sont des entiers, $\boxed{\text{la longueur BE est un entier.}}$

- e. Ainsi, le triangle BDE est un triangle isocèle rectangle dont les longueurs des côtés sont des entiers strictement plus petits que les longueurs des côtés de ABC. C'est absurde puisque ABC est le plus petit triangle rectangle isocèle dont les longueurs des côtés sont des entiers.

Ainsi, on conclut que $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.