

Devoir à la maison n°1
À rendre le mercredi 18 septembre 2019

On propose une autre démonstration de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ en utilisant un raisonnement géométrique. Pour cela, on raisonne par l'absurde en supposant que $\sqrt{2}$ est rationnel. Il existe donc deux entiers naturels non nuls p et q tels que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$.

1. On considère un triangle PQR rectangle et isocèle en P tel que $PQ = PR = q$.
Démontrer que $QR = p$.
2. Ainsi, il existe au moins un triangle rectangle isocèle dont tous les côtés ont des longueurs qui sont des nombres entiers. Parmi tous les triangles rectangles isocèles à côtés entiers, on note ABC celui qui a les plus petits côtés. On suppose qu'il est rectangle en A et on pose $a = BC$ et $b = AB = AC$. Enfin, on note D le point de $[BC]$ tel que $CA = CD$ et E le point d'intersection de $[AB]$ avec la perpendiculaire à $[BC]$ passant par D.
 - a. Faire une figure.
 - b. Montrer que le triangle BDE est rectangle isocèle en D.
 - c. Montrer que la longueur BD est un entier.
 - d. Montrer que $AE = a - b$ et en déduire que la longueur BE est un entier.
 - e. Conclure.

Devoir à la maison n°1
À rendre le mercredi 18 septembre 2019

On propose une autre démonstration de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ en utilisant un raisonnement géométrique. Pour cela, on raisonne par l'absurde en supposant que $\sqrt{2}$ est rationnel. Il existe donc deux entiers naturels non nuls p et q tels que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$.

1. On considère un triangle PQR rectangle et isocèle en P tel que $PQ = PR = q$.
Démontrer que $QR = p$.
2. Ainsi, il existe au moins un triangle rectangle isocèle dont tous les côtés ont des longueurs qui sont des nombres entiers. Parmi tous les triangles rectangles isocèles à côtés entiers, on note ABC celui qui a les plus petits côtés. On suppose qu'il est rectangle en A et on pose $a = BC$ et $b = AB = AC$. Enfin, on note D le point de $[BC]$ tel que $CA = CD$ et E le point d'intersection de $[AB]$ avec la perpendiculaire à $[BC]$ passant par D.
 - a. Faire une figure.
 - b. Montrer que le triangle BDE est rectangle isocèle en D.
 - c. Montrer que la longueur BD est un entier.
 - d. Montrer que $AE = a - b$ et en déduire que la longueur BE est un entier.
 - e. Conclure.