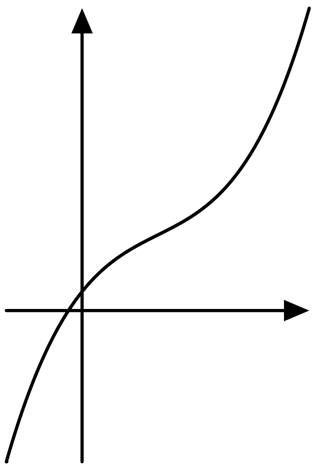
♦ Chapitre 9. —Étude qualitative d'une fonction

I. — Variations

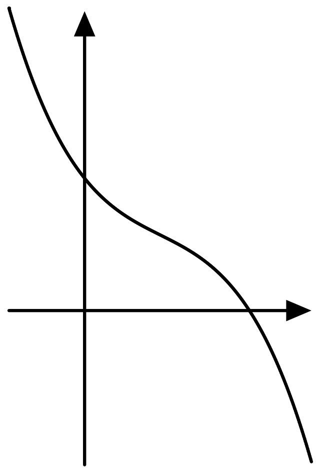
Définition 1

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que :

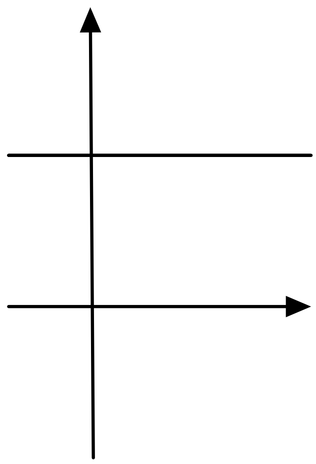
- f est croissante sur I si, pour tous réels a et b appartenant à I tels que $a \leqslant b$, $f(a) \leqslant f(b)$.
- f est décroissante sur I si, pour tous réels a et b appartenant à I tels que $a \leqslant b$, $f(a) \geqslant f(b)$.
- f est constante sur I si, pour tous réels a et b appartenant à I tels que $a \leqslant b$, $f(a) = f(b)$.



Courbe d'une fonction croissante



Courbe d'une fonction décroissante



Courbe d'une fonction constante

Remarque 2.

1. Si dans la définition précédente les inégalités sont strictes, on dit que la fonction est strictement croissante ou strictement décroissante.

   Toute fonction strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur I est croissante (resp. décroisante) sur I.
2. Une fonction croissante sur un intervalle I est une fonction qui converse l'ordre : si $a \leqslant b$ alors $f(a) \leqslant f(b)$. Au contraire, une fonction décroissante sur un intervalle I est une fonction qui renverse l'ordre : si $a \leqslant b$ alors $f(a) \geqslant f(b)$.
3. Une fonction constante I est à la fois croissante et décroissante sur I.
4. Graphiquement, la croissance d'une fonction sur un intervalle I se traduit par le fait que sa courbe « monte » sur I et la décroissance d'une fonction se traduit par le fait que sa courbe « descend » sur I.

Exemple 3.

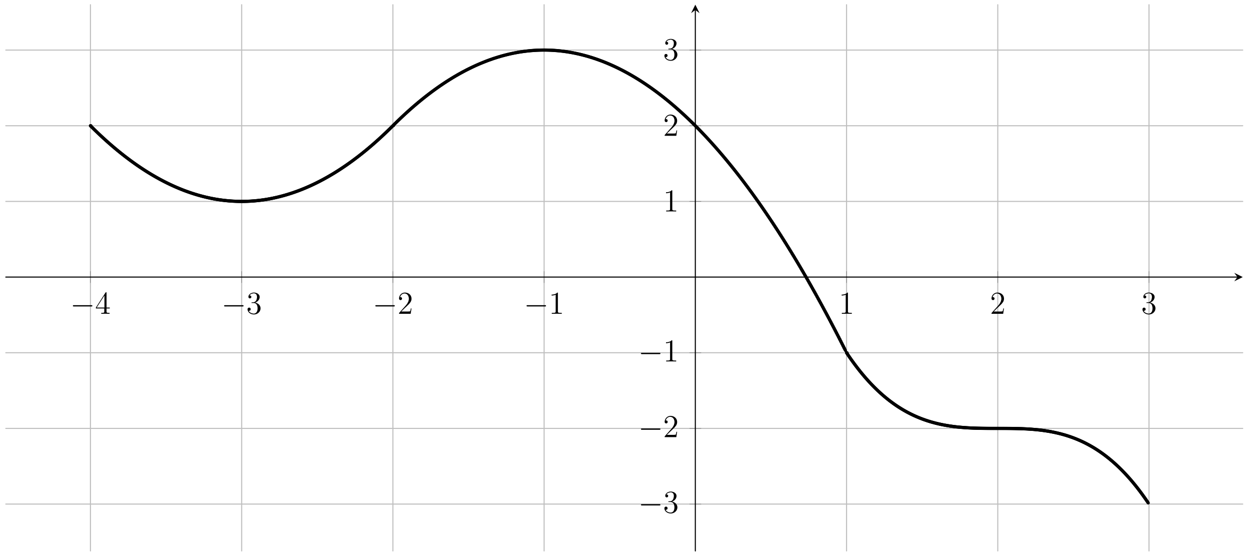
1. La fonction $f : x \mapsto 3x - 2$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. En effet, si a et b sont deux réels tels que $a < b$ alors $3a < 3b$ donc $3a - 2 < 3b - 2$ c'est-à-dire $f(a) < f(b)$.

2. La fonction $g : x \mapsto -5x + 1$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. En effet, si a et b sont deux réels tels que $a < b$ alors $-5a > -5b$ donc $-5a + 1 > -5b + 1$ c'est-à-dire $g(a) > g(b)$.

Définition 4

Étudier les variations d'une fonction définie sur un ensemble D, c'est déterminer les intervalles sur lesquels D est croissante et les intervalles sur lesquels D est décroissante.

Exemple 5. Considérons la fonction f définie sur $[-4\,;3]$ dont la courbe est représentée ci-dessous.



Alors, la fonction f est décroissante sur $[-4\,;-3]$, croissante sur $[-3\,;-1]$ et décroissante sur $[-1\,;3]$.

On peut également décrire les variations de f à l'aide d'un tableau appelé tableau de variation :

x	-4		-3		-1		3
variation de f	2	↘	1	↗	3	↘	-3

Définition 6

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Si f ne change pas de variation sur I, on dit que f est monotone sur I.

Exemple 7. Il découle de l'exemple 3 que les fontions $f : x \mapsto 3x - 2$ et $g : x \mapsto -5x + 1$ sont monotones sur $\mathbb{R}$.

En revanche, la fonction de l'exemple 5 n'est pas monotone sur $[-4\,;3]$ puisqu'elle change de variation en -3 et en -1.

II. — Extremums

Définition 8

Soit f une fonction définie sur un ensemble D et $a \in D$.

1. On dit que f présente un maximum en a sur I si, pour tout $x \in I$, $f(x) \leqslant f(a)$. Le nombre $f(a)$ est alors appelé le maximum de f sur I.
2. On dit que f présente un minimum en a sur I si, pour tout $x \in I$, $f(x) \geqslant f(a)$. Le nombre $f(a)$ est alors appelé le minimum de f sur I.

Remarque 9. Déterminer les extremums de f sur I, c'est déterminer, s'ils existent, le minimum et le maximum de f sur I.

Exemple 10. Reprenons la fonction de l'exemple 5.

Le maximum de f sur $[-4\,;3]$ est 3 et il est atteint en -1 et le minimum de f sur $[-4\,;3]$ est -3 atteint en 3.

Le maximum de f sur $[-4\,;-2]$ est 2 et il est atteint en -4 et en -2 et le minimum de f sur $[-4\,;-2]$ est 1 atteint en -3.

Exemple 11. Soit $f : x \mapsto x^2 - 4x + 1$ définie sur $\mathbb{R}$. Montrons que f présente un minimum en 2.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors, $f(2) = 2^2 - 4 \times 2 + 1 = -3$ donc

$$f(x) - f(2) = x^2 - 4x + 1 - (-3) = x^2 - 4x + 1 + 3 = x^2 - 4x + 4 = x^2 - 2 \times 2 \times x + 2^2 = (x-2)^2$$

Comme le carré d'un réel est positif, $f(x) - f(2) \geqslant 0$ donc $f(x) \geqslant f(2)$.

On en déduit donc que f présente un minimum en 2 et ce minimum vaut $f(2) = -3$.

III. — Parité d'une fonction

Définition 12

On dit qu'un ensemble de nombres réels E est centré en 0 si, pour tout $x \in E$, $-x \in E$.

Exemple 13. Les ensembles $[-1\,;1]$, $]-3\,;3[$, $\mathbb{Z}$ et $]-3\,;-1] \cup [1\,;3[$ sont centrés en 0.

En revanche, les ensembles $[-1\,;2]$, $]-5\,;5]$ et $\mathbb{N}$ ne sont pas centrés en 0.

Définition 14

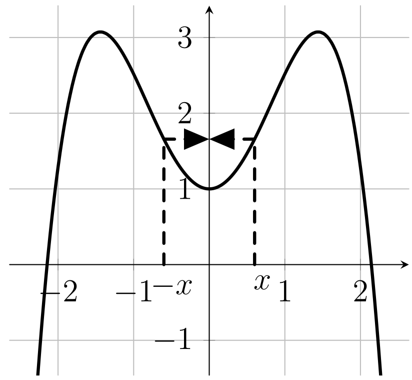
Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathcal{D}$. On dit que f est une fonction paire si $\mathcal{D}$ est centré en 0 et, pour tout réel x, $f(-x) = f(x)$.

Exemple 15.

1. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ est une fonction paire. En effet, $\mathbb{R}$ est centré en 0 et, pour tout réel x, $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$.
2. De manière plus générale, pour tout entier naturel pair n, la fonction $f : x \mapsto x^n$ définie sur $\mathbb{R}$ est paire.
3. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + x$ n'est pas paire car $f(-1) = (-1)^2 + (-1) = 1 - 1 = 0$ et $f(1) = 1^2 + 1 = 2$ donc $f(-1) \neq f(1)$.

Propriété 16

La courbe d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.



Définition 17

Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathcal{D}$. On dit que f est une fonction impaire si $\mathcal{D}$ est centré en 0 et, pour tout réel x, $f(-x) = -f(x)$.

Exemple 18.

1. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$ est une fonction impaire. En effet, $\mathbb{R}$ est centré en 0 et, pour tout réel x, $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$.
2. De manière plus générale, pour tout entier naturel impair n, la fonction $f : x \mapsto x^n$ définie sur $\mathbb{R}$ est impaire.
3. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2+x$ n'est pas impaire car $f(-1) = (-1)^2+(-1) = 1 - 1 = 0$ et $f(1) = 1^2 + 1 = 2$ donc $f(-1) \neq -f(1)$.
   Ainsi, d'après l'exemple 19, la fonction f n'est ni paire ni impaire.

Propriété 19

La courbe d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine du repère.