⧫ Chapitre 10. — Fonctions affines et inéquations

I. — Fonctions affines

1) Définition

Définition 1

On dit qu'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est affine s'il existe deux réels m et p tels que, pour tout réel x, $f(x) = mx + p$.

Exemple 2. Les fonctions suivantes sont des fonctions affines :

1. $f_1 : x \mapsto 2x + 1$ ($m = 2$ et $p = 1$) ;
2. $f_2 : x \mapsto 1 - 5x$ ($m = -5$ et $p = 1$) ;
3. $f_3 : x \mapsto x\sqrt{2} - 3$ ($m = \sqrt{2}$ et $p = -3$) ;
4. $f_4 : x \mapsto \frac{2}{3}x + \pi$ ($m = \frac{2}{3}$ et $p = \pi$) ;
5. $f_5 : x \mapsto \frac{5x-3}{7}$ ($m = \frac{5}{7}$ et $p = -\frac{3}{7}$) ;
6. $f_6 : x \mapsto 3$ ($m = 0$ et $p = 3$) ;
7. $f_7 : x \mapsto -4x$ ($m = -4$ et $p = 0$) ;
8. $f_8 : x \mapsto 0$ ($m = 0$ et $p = 0$).

Remarque 3. Dans la définition précédente, si $m = 0$, on obtient des fonctions constantes et si $p = 0$, on obtient des fonctions linéaires.

Exercice 4. La fonction $f : x \mapsto (x + 1)^2 - x^2$ définie sur $\mathbb{R}$ est-elle affine ?

Solution. — Pour tout réel x, $f(x) = x^2 + 2x + 1^2 - x^2 = 2x + 1$ donc f est une fonction affine.

Théorème 5

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Alors, f est une fonction affine si et seulement s'il existe un nombre réel m tel que, pour tous réels a et b différents, $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = m$. Dans ce cas, f est de la forme $f : x \mapsto mx + f(0)$.

Démonstration. Supposons que f est affine. Alors, il existe deux réels m et p tels que $f : x \mapsto mx + p$. Soit a et b deux réels différents. Alors, $f(a) = ma + p$ et $f(b) = mb + p$ donc $f(b) - f(a) = mb + p - (ma + p) = mb + p - ma - p = mb - ma = m(b - a)$. Comme $a \neq b$, $b - a \neq 0$ donc, en divisant par $b - a$, on obtient $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = m$. De plus, $f(0) = m \times 0 + p = p$.

Réciproquement, supposons qu'il existe un réel m tel que pour tous réels a et b différents, $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = m$. Soit x un réel. Si $x \neq 0$, on applique ce qui précède à $a = 0$ et $b = x$ ce qui donne $\dfrac{f(x) - f(0)}{x} = m$, donc, en multipliant par x, on obtient $f(x) - f(0) = mx$ soit finalement $f(x) = mx + f(0)$. De plus, cette égalité est encore vraie pour $x = 0$ donc, pour tout réel x, $f(x) = mx + p$ en posant $p = f(0)$ donc f est affine. □

Remarque 6. Le nombre $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ est appelé le taux de variation de f entre a et b. Ainsi, une fonction est affine si et seulement si son taux de variation est le même quels que soient les nombres a et b.

Méthode 7 : Trouver l'expression d'une fonction affine

Soit f une fonction affine telle que $f(3) = -2$ et $f(-1) = 5$. Comme f est affine, il existe deux réels m et p tels que, pour tout réel x, $f(x) = mx + p$. De plus, d'après le théorème 5,

$$m = \frac{f(3) - f(-1)}{3 - (-1)} = \frac{-2 - 5}{4} = \frac{-7}{4}$$

Ainsi, $f : x \mapsto -\frac{7}{4}x + p$. De plus, $f(3) = -2$ donc $-\frac{7}{4} \times 3 + p = -2$ donc $p = -2 + \frac{7}{4} \times 3 = \frac{13}{4}$.
Ainsi, $f : x \mapsto -\frac{7}{4}x + \frac{13}{4}$.

Méthode 8 : Montrer qu'une fonction n'est pas affine

Considérons la fonction $f : x \mapsto (x+1)^3 - x^3$ définie sur $\mathbb{R}$. Alors, $f(0) = (0+1)^2 - 0^2 = 1$, $f(-1) = (-1+1)^3 - (-1)^3 = 1$ et $f(1) = (1+1)^3 - 1^3 = 7$ donc

$$\frac{f(-1) - f(0)}{-1 - 0} = \frac{1 - 1}{-1} = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{7 - 1}{1} = 6$$

Ainsi, le taux de variation de f n'est pas le même pour $a = 0$ et $b = -1$ et pour $a = 0$ et $b = 1$ donc f n'est pas une fonction affine.

2) Variation d'une fonction affine

Propriété 9

Soit m et p deux réels et $f : x \mapsto mx + p$ définie sur $\mathbb{R}$.

1. La fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ si $m > 0$.
2. La fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ si $m < 0$.
3. La fonction f est constante sur $\mathbb{R}$ si $m = 0$.

Démonstration. Soit a et b deux réels tels que $a < b$. Alors, d'après le théorème 5, $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = m$ donc, en multipliant par $b - a$, il vient $f(b) - f(a) = m(b - a)$. Comme $a < b$, $b - a > 0$ donc le signe de $f(b) - f(a)$ est le signe de m. Ainsi,

1. si $m > 0$, $m(b - a) > 0$ donc $f(b) - f(a) > 0$ c'est-à-dire $f(b) > f(a)$ donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$;
2. si $m < 0$, $m(b - a) < 0$ donc $f(b) - f(a) < 0$ c'est-à-dire $f(b) < f(a)$ donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$;
3. si $m = 0$, $m(b - a) = 0$ donc $f(b) - f(a) = 0$ c'est-à-dire $f(b) = f(a)$ donc f est constante sur $\mathbb{R}$.

□

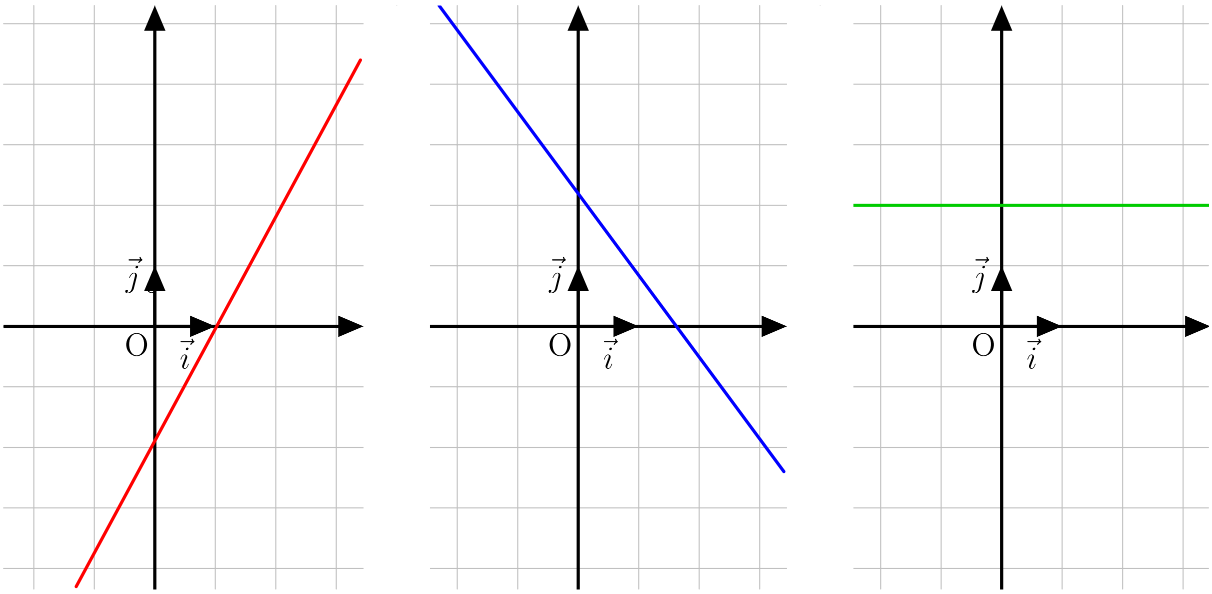
Exemple 10. Si on reprend les fonctions de l'exemple 2, les fonctions f_1, f_3, f_4 et f_5 sont strictement croissantes sur $\mathbb{R}$, les fonctions f_2 et f_7 sont strictement décroissantes sur $\mathbb{R}$ et les fonctions f_6 et f_8 sont constantes sur $\mathbb{R}$.

3) Représentation d'une fonction affine

Propriété 11

La courbe représentative d'une fonction affine est une droite.

L'allure d'une droite représentant la fonction affine $x \mapsto mx + p$ dépend de la valeur de m :



$m > 0$ $\qquad$ $m < 0$ $\qquad$ $m = 0$

Définition 12

Soit m et p deux réels et D la droite représentant la fonction affine $x \mapsto mx + p$. Alors,

1. On dit que D est la droite d'équation $y = mx + p$.

2. Le nombre m est appelé le coefficient directeur de D.

3. Le nombre p est appelé l'ordonnée à l'origine de D.

Remarque 13. Dire que D a pour équation $y = mx+p$ signifie qu'un point $M\,(x_M\,; y_M)$ appartient à D si et seulement si $y_M = mx_M + p$.

Exemple 14. Soit D la droite d'équation $y = -3x + 2$. Alors, le point $\mathrm{A}(1\,; -1)$ appartient à D car $-3x_\mathrm{A} + 2 = -3 \times 1 + 2 = -1 = y_\mathrm{A}$. En revanche, le point $\mathrm{B}(2\,; -3)$ n'appartient pas à D car $-3x_\mathrm{B} + 2 = -3 \times 2 + 2 = -4 \neq y_\mathrm{B}$.

Remarque 15. Toute fonction affine est représentée par une droite mais une droite parallèle à l'axe des ordonnées ne représente pas une fonction affine (car elle ne peut pas représenter une fonction). C'est le seul cas où une droite n'est pas la courbe d'une fonction affine.

II. — Inéquations

1) Étude de signe

Définition 16

Soit f une fonction définie sur un ensemble E. Étudier le signe de f sur E, c'est déterminer l'ensemble des x de E tels que $f(x) \leqslant 0$ et l'ensemble des x de E tels que $f(x) \geqslant 0$.

Exemple 17. Considérons la fonction affine $f : x \mapsto -5x + 3$. Alors, comme $-5 < 0$, pour tout réel x,

$$f(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow -5x + 3 \geqslant 0 \Leftrightarrow -5x \geqslant -3 \Leftrightarrow x \leqslant \frac{-3}{-5} \Leftrightarrow x \leqslant \frac{3}{5}$$

Ainsi, on conclut que $f(x) \geqslant 0$ si $x \in \left]-\infty\,;\frac{3}{5}\right]$ et $f(x) \leqslant 0$ si $x \in \left[\frac{3}{5}\,;+\infty\right[$

a) Signe d'une fonction affine

Propriété 18

Soit m et p deux réels tels que $m \neq 0$ et $f : x \mapsto mx + p$.

1. Si $m < 0$ alors $f(x) \geqslant 0$ si $x \in \left]-\infty\,;-\frac{p}{m}\right]$ et $f(x) \leqslant 0$ si $x \in \left[-\frac{p}{m}\,;+\infty\right[$.
2. Si $m > 0$ alors $f(x) \leqslant 0$ si $x \in \left]-\infty\,;-\frac{p}{m}\right]$ et $f(x) \geqslant 0$ si $x \in \left[-\frac{p}{m}\,;+\infty\right[$.

Démonstration.

1. Si $m < 0$ alors la fonction affine f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. De plus, $f(-\frac{p}{m}) = 0$ donc $f(x) \geqslant 0$ si $x \leqslant -\frac{p}{m}$ et $f(x) \leqslant 0$ si $x \geqslant -\frac{p}{m}$.
2. Si $m > 0$ alors la fonction affine f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus, $f(-\frac{p}{m}) = 0$ donc $f(x) \leqslant 0$ si $x \leqslant -\frac{p}{m}$ et $f(x) \geqslant 0$ si $x \geqslant -\frac{p}{m}$.

□

Remarque 19. De manière générale, on peut résumer le signe d'une fonction affine par le tableau suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{p}{m}$		$+\infty$
signe de $mx + p$		signe de $-m$	0	signe de m	

b) Signe d'un produit

Pour étudier le signe d'un produit, on utilise la règle des signes : « + par + donne +, + par − donne − et − par − donne + »

Pour cela, il peut être pratique d'utiliser un tableau de signe.

Exemple 20. Étudier le signe sur $\mathbb{R}$ de $A(x) = (-3x + 2)(x + 4)$.

On voit que $A(x)$ est le produit de deux facteurs affines : $-3x + 2$ et $x + 4$.

<u>Signe de $-3x + 2$</u>

Ici, $m = -3$ et $p = 2$ donc $-\frac{p}{m} = -\frac{2}{-3} = \frac{2}{3}$. Comme $m < 0$, on en déduit que $-3x + 2 \geqslant 0$ si $x \leqslant \frac{2}{3}$ et $-3x + 2 \leqslant 0$ si $x \geqslant \frac{2}{3}$.

Signe de $x+4$
Ici, $m=1$ et $p=4$ donc $-\frac{p}{m}=-\frac{4}{1}=-4$. Comme $m>0$, on en déduit que $x+4\leqslant 0$ si $x\leqslant -4$ et $x+4\geqslant 0$ si $x\geqslant -4$.
Signe de $A(x)$
On rassemble les résultats précédents dans un tableau de signe. Comme $A(x)$ est le produit de $-3x+2$ et de $x+4$, la dernière ligne du tableau est obtenue en utilisant la règle des signes dans chaque colonne.

x	$-\infty$		-4		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
signe de $-3x+2$		$+$		$+$	0	$-$	
signe de $x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $A(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Ainsi, $A(x)\geqslant 0$ si $x\in\left[-4\,;\frac{2}{3}\right]$ et $A(x)\leqslant 0$ si $x\in\left]-\infty\,;-4\right]\cup\left[\frac{2}{3}\,;+\infty\right[$.

c) Signe d'un quotient

Le principe de l'étude du signe d'un quotient est le même que pour un produit en prenant garde au fait que le dénominateur ne doit pas s'annuler.

Exemple 21. Étudier le signe de $B(x)=\dfrac{2x+4}{5x-1}$
On voit que $B(x)$ est le quotient de deux termes affines : $2x+4$ et $5x-1$.
Signe de $2x+4$
Ici, $m=2$ et $p=4$ donc $-\frac{p}{m}=-\frac{4}{2}=-2$. Comme $m>0$, on en déduit que $2x+4\leqslant 0$ si $x\leqslant -2$ et $2x+4\geqslant 0$ si $x\geqslant -2$.
Signe de $5x-1$
Ici, $m=5$ et $p=-1$ donc $-\frac{p}{m}=-\frac{-1}{5}=\frac{1}{5}$. Comme $m>0$, on en déduit que $5x-1\leqslant 0$ si $x\leqslant\frac{1}{5}$ et $5x-1\geqslant 0$ si $x\geqslant\frac{1}{5}$.
Signe de $B(x)$
On rassemble les résultats précédents dans un tableau de signe :

x	$-\infty$		-2		$\frac{1}{5}$		$+\infty$
signe de $2x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $5x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $B(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

Dans ce tableau, la double-barre sur la dernière ligne en dessous de $\frac{1}{5}$ signifie que $B(x)$ n'est pas défini si $x=\frac{1}{5}$ (car alors son dénominateur s'annule).
Ainsi, $B(x)\geqslant 0$ si $x\in\left]-\infty\,;-2\right]\cup\left]\frac{1}{5}\,;+\infty\right[$ et $B(x)\leqslant 0$ si $x\in\left[-2\,;\frac{1}{5}\right[$.
Remarquer que le crochet est nécessairement ouvert en $\frac{1}{5}$ car $B(x)$ n'existe pas si $x=\frac{1}{5}$.

2) Résolution d'inéquations

Une inéquation est une inégalité dans laquelle figure une ou plusieurs inconnues notées en général x (y, z, t, ...).

Dans la suite, on ne considère que des inéquations à une seule inconnue x.

Résoudre une inéquation, c'est déterminer l'ensemble de ses solutions c'est-à-dire l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles l'inégalité est vraie.

On dit que deux inéquations sont équivalentes si elles ont le même ensemble de solutions.

D'après les résultats du paragraphe III du Chapitre 4, on obtient une inéquation équivalente si :

1. on ajoute ou un soustrait un même nombre aux deux membres d'une inéquation ;

2. on multiplie ou on divise les deux membres d'une inéquation par un même nombre non nul à condition de changer le sens de l'inégalité si ce nombre est strictement négatif.

Pour résoudre une inéquation, on peut utiliser une méthode graphique (voir le Chapitre 5, § III.3.c)). Cependant, cette méthode n'est pas toujours précise ni exacte.

Pour obtenir une réponse exacte et certaine, on peut également utiliser une méthode algébrique en se ramenant à une étude de signe à l'aide d'inéquations équivalentes.

Exemple 22. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation (I) : $(2x+3)(x+1) \geqslant (2x+3)(2-2x)$.

On commence par soustraire $(2x+3)(2-2x)$ aux deux membres de l'inéquation. On obtient :

$$(I) \Leftrightarrow \underline{(2x+3)}(x+1) - \underline{(2x+3)}(2-2x) \geqslant 0$$

On reconnaît le facteur commun $2x+3$. On peut donc factoriser le membre de gauche :

$$\begin{aligned}(I) &\Leftrightarrow \underline{(2x+3)}\left[(x+1)-(2-2x)\right] \geqslant 0 \\ (I) &\Leftrightarrow (2x+3)(x+1-2+2x) \geqslant 0 \\ (I) &\Leftrightarrow (2x+3)(3x-1) \geqslant 0\end{aligned}$$

On est donc amené à étudier le signe de $A(x) = (2x+3)(3x-1)$ qui est un produit de deux facteurs affines. On peut dès lors utiliser un tableau de signe.

Signe de $2x+3$

Ici, $m = 2$ et $p = 3$ donc $-\frac{p}{m} = -\frac{3}{2} = -\frac{3}{2}$. Comme $m > 0$, on en déduit que $2x+3 \leqslant 0$ si $x \leqslant -\frac{3}{2}$ et $2x+3 \geqslant 0$ si $x \geqslant -\frac{3}{2}$.

Signe de $3x-1$

Ici, $m = 3$ et $p = -1$ donc $-\frac{p}{m} = -\frac{-1}{3} = \frac{1}{3}$. Comme $m > 0$, on en déduit que $3x-1 \leqslant 0$ si $x \leqslant \frac{1}{3}$ et $3x-1 \geqslant 0$ si $x \geqslant \frac{1}{3}$.

Signe de $A(x)$

On rassemble les résultats précédents dans un tableau de signe :

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
signe de $2x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $3x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $A(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi, $A(x) \geqslant 0$ si $x \in \left]-\infty\,; -\frac{3}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{3}\,; +\infty\right[$ et $A(x) \leqslant 0$ si $x \in \left[-\frac{3}{2}\,; \frac{1}{3}\right]$.

Or, on a vu que (I) est équivalente à $A(x) \geqslant 0$ donc l'ensemble des solutions de (I) est $\left]-\infty\,; -\frac{3}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{3}\,; +\infty\right[$.

Exemple 23. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation (J) : $(2x+3)^2 > (3x+2)^2$.

On commence par soustraire $(3x+2)^2$ aux deux membres de l'inéquation. On obtient :

$$(I) \Leftrightarrow (2x+3)^2 - (3x+2)^2 > 0.$$

On reconnaît une identité remarquable (de la forme $a^2 - b^2$). On peut donc factoriser le membre de gauche :

$$\begin{aligned}
(J) &\Leftrightarrow [(2x+3)-(3x+2)]\,[(2x+3)+(3x+2)] > 0 \\
(J) &\Leftrightarrow (2x+3-3x-2)(2x+3+3x+2) > 0 \\
(I) &\Leftrightarrow (-x+1)(5x+5) > 0
\end{aligned}$$

On est donc amené à étudier le signe de $B(x) = (-x+1)(5x+5)$ qui est un produit de deux facteurs affines. On peut dès lors utiliser un tableau de signe.

Signe de $-x+1$

Ici, $m=-1$ et $p=1$ donc $-\frac{p}{m} = -\frac{1}{-1} = 1$. Comme $m<0$, on en déduit que $-x+1 \geqslant 0$ si $x \leqslant 1$ et $-x+1 \leqslant 0$ si $x \geqslant 1$.

Signe de $5x+5$

Ici, $m=5$ et $p=5$ donc $-\frac{p}{m} = -\frac{5}{5} = -1$. Comme $m>0$, on en déduit que $5x+5 \leqslant 0$ si $x \leqslant -1$ et $5x+5 \geqslant 0$ si $x \geqslant -1$.

Signe de $B(x)$

On rassemble les résultats précédents dans un tableau de signe :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
signe de $-x+1$		$+$		$+$	0	$-$	
signe de $5x+5$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $B(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Ainsi, $B(x) \geqslant 0$ si $x \in [-1\,;1]$ et $B(x) \leqslant 0$ si $x \in \,]-\infty\,;-1] \cup [1\,;+\infty[$.

Or, on a vu que (J) est équivalente à $B(x) > 0$ donc l'ensemble des solutions de (J) est $]-1\,;1[$. Ici, l'intervalle est ouvert car l'inégalité cherchée est stricte.