

◆ Chapitre 7. — Géométrie repérée

I. — Retour sur les repères et les coordonnées

1) Repères et bases du plan

Définition 1 : Rappel

Un repère du plan est la donnée d'un triplet de points (O, I, J) tels O, I et J ne soient pas alignés.

Remarque 2. On sait, d'après les résultats du chapitre 3 que trois points O, I et J sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OJ}$ sont colinéaires. Ainsi, en posant $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$, se donner un repère (O, I, J) revient à se donner un triplet $(O; \vec{i}, \vec{j})$ où O est un point et $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont deux vecteurs non colinéaires du plan.

Définition 3

Si $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont deux vecteurs non colinéaires du plan, on dit que $(\vec{i}, \vec{j})$ est une base du plan.

Remarque 4. Ainsi, on peut définir un repère du plan :

- soit par la donnée d'un triplet (O, I, J) de points non alignés ;
- soit par la donnée d'un triplet $(O; \vec{i}, \vec{j})$ où O est un point et $(\vec{i}, \vec{j})$ est une base du plan.

Définition 5 : Rappel

Soit $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan. On note I et J les points tels que $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$.

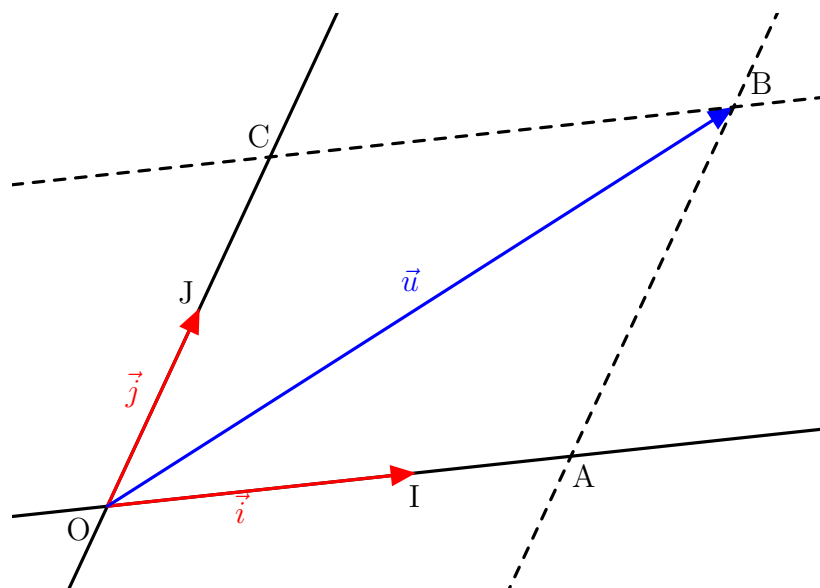
1. La droite (OI) est appelée l'axe des abscisses. On la note aussi $(O; \vec{i})$.
2. La droite (OJ) est appelée l'axe des ordonnées. On la note aussi $(O; \vec{j})$.
3. Si (OI) et (OJ) sont perpendiculaires, on dit que le repère est orthogonal.
4. Une unité étant choisie, si (OI) et (OJ) sont perpendiculaires et $OI = OJ = 1$, on dit que le repère est orthonormée (ou orthonormal).

2) Coordonnées

Théorème 6

Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ une base du plan. Pour tout vecteur $\vec{u}$ du plan, il existe un unique couple de réels (x, y) tel que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

Démonstration. Considérons un point O quelconque du plan et les points I, J et B tels que $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$, $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$ et $\overrightarrow{OB} = \vec{u}$. La parallèle à l'axe des ordonnées passant par B coupe l'axe des abscisses en A et la parallèle à l'axe des abscisses passant par B coupe l'axe des ordonnées en C . On obtient ainsi un parallélogramme $OABC$.



Les points O, I et A sont alignés donc les vecteurs $\vec{i}$ et $\overrightarrow{OA}$ sont colinéaires. Ainsi, il existe un réel x tel que $\overrightarrow{OA} = x\vec{i}$.

De même, les points O, J et C sont alignés donc les vecteurs $\vec{j}$ et $\overrightarrow{OC}$ sont colinéaires. Ainsi, il existe un réel y tel que $\overrightarrow{OC} = y\vec{j}$.

Or, d'après la règle du parallélogramme, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$ donc $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

Ceci montre l'existence du couple $(x; y)$. Montrons qu'il est de plus unique.

Pour cela, supposons qu'il existe un autre couple $(x'; y')$ de réels tel que $\vec{u} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$. Alors, $x\vec{i} + y\vec{j} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$ donc $(x - x')\vec{i} = (y' - y)\vec{j}$. Si $x - x' \neq 0$ alors $\vec{i} = \frac{y' - y}{x - x'}\vec{j}$ ce qui n'est pas possible car $\vec{i}$ et $\vec{j}$ ne sont pas colinéaires. Ainsi, $x - x' = 0$ i.e. $x' = x$. Par suite, $(y' - y)\vec{j} = \vec{0}$. Or, $\vec{j} \neq \vec{0}$ donc $y' - y = 0$ donc $y = y'$. Ainsi, $(x; y) = (x'; y')$ donc le couple $(x; y)$ est unique. $\square$

Définition 7

Soit $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan.

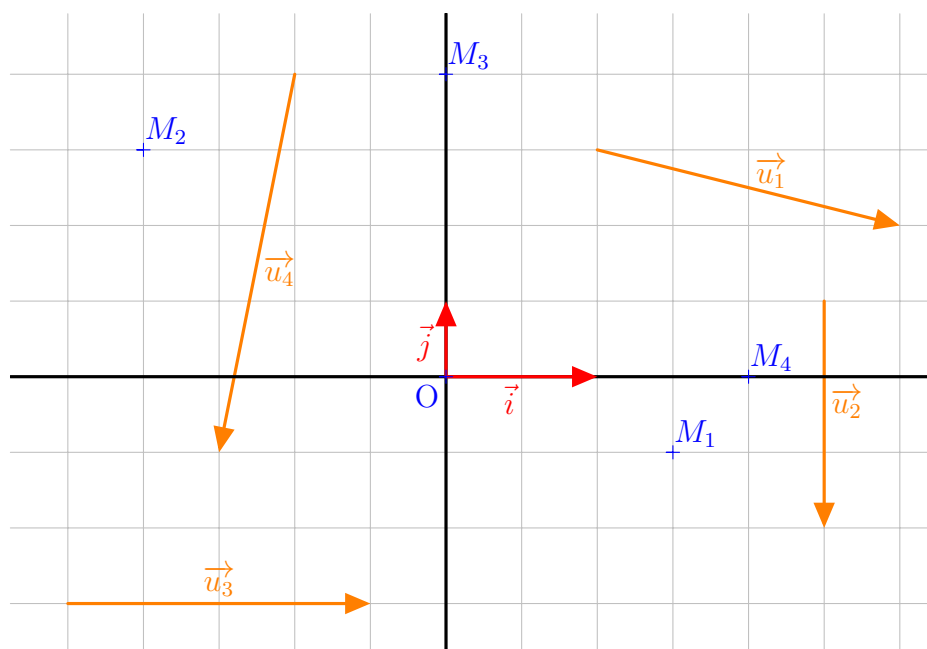
1. Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan. Les seuls réels x et y tels que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ sont appelés les coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$. On note alors $\vec{u}(x; y)$.
2. Soit M un vecteur du plan. Les seuls réels x et y tels que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$ sont appelés les coordonnées de $\vec{M}$ dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On note alors $M(x; y)$.

Remarque 8.

1. Pour les points, cette définition est équivalente à celle donnée dans le chapitre 5.
2. Les coordonnées d'un vecteur ne dépendent que de la base $(\vec{i}, \vec{j})$ et pas de l'origine O. Si $\vec{u}$ est un vecteur, on notera ses coordonnées (dans une base donnée) $x_{\vec{u}}$ et $y_{\vec{u}}$.
3. Si M est un point, on notera ses coordonnées (dans un repère donné) x_M et y_M .
4. Les coordonnées du point M sont les mêmes que celles du vecteur $\overrightarrow{OM}$.
5. L'unicité des coordonnées assure que deux vecteurs (ou deux points) sont égaux si et seulement s'ils ont les mêmes coordonnées.

En particulier, un vecteur est nul si et seulement si ses coordonnées sont $(0; 0)$.

Exemple 9. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$ et $\vec{u}_4$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ et les coordonnées des points M_1 , M_2 , M_3 et M_4 dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.



II. — Propriétés des coordonnées

1) Opérations sur les vecteurs

Propriété 10

Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ une base du plan. On suppose que, dans cette base, les coordonnées de $\vec{u}$ sont $(x; y)$ et celles de $\vec{v}$ sont $(x'; y')$.

1. Les coordonnées de $\vec{u} + \vec{v}$ sont $(x + x'; y + y')$.
2. Les coordonnées de $\vec{u} - \vec{v}$ sont $(x - x'; y - y')$.
3. Pour tout réel k , les coordonnées de $k\vec{u}$ sont $(kx; ky)$.

Démonstration. Par définition, $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ et $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$ donc

1. $\vec{u} + \vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + x'\vec{i} + y'\vec{j} = (x + x')\vec{i} + (y + y')\vec{j}$ donc les coordonnées de $\vec{u} + \vec{v}$ sont $(x + x'; y + y')$.
2. $\vec{u} - \vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} - (x'\vec{i} + y'\vec{j}) = (x - x')\vec{i} + (y - y')\vec{j}$ donc les coordonnées de $\vec{u} - \vec{v}$ sont $(x - x'; y - y')$.
3. $k\vec{u} = k(x\vec{i} + y\vec{j}) = (kx)\vec{i} + (ky)\vec{j}$ donc $k\vec{u}$ $(kx; ky)$.

□

Remarque 11. On peut retenir la propriété précédente de la façon suivante : on effectue sur les coordonnées les mêmes opérations que sur les vecteurs.

Exemple 12. Dans une base du plan, on considère les vecteurs $\vec{u}(-1; 2)$ et $\vec{v}(3; -4)$. On pose $\vec{w} = 3\vec{u} - 2\vec{v}$. Alors, d'après la propriété précédente, les coordonnées de $\vec{w}$ sont

$$(3 \times (-1) - 2 \times 3; 3 \times 2 - 2 \times (-4))$$

c'est-à-dire $\vec{w}(-9; 14)$.

Propriété 13

Le plan est muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Soit A et B deux points de coordonnées respectives $(x_A; y_A)$ et $(x_B; y_B)$. Alors, les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $(x_B - x_A; y_B - y_A)$.

Démonstration. D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$. Or, par définition, les coordonnées de $\overrightarrow{OB}$ sont $(x_B; y_B)$ et les coordonnées de $\overrightarrow{OA}$ sont $(x_A; y_A)$ donc, d'après la propriété 10, les coordonnées de $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ sont $(x_B - x_A; y_B - y_A)$. $\square$

Exemple 14. Le plan est muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On considère les points A $(4; -2)$ et B $(-2; 3)$. Alors, les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont $(-2 - 4; 3 - (-2))$ c'est-à-dire $\overrightarrow{AB}(-6; 5)$.

2) Coordonnées du milieu

Propriété 15

Le plan est muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Soit A et B deux points de coordonnées respectives $(x_A; y_A)$ et $(x_B; y_B)$. Le milieu I du segment $[AB]$ a pour coordonnées $\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$.

Démonstration. Notons $(x_I; y_I)$ les coordonnées de I. Alors, $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$. Or, les coordonnées de $\overrightarrow{AI}$ sont $(x_I - x_A; y_I - y_A)$ et celles de $\overrightarrow{IB}$ sont $(x_B - x_I; y_B - y_I)$. Dès lors, $x_I - x_A = x_B - x_I$ et $y_I - y_A = y_B - y_I$ donc $2x_I = x_A + x_B$ et $2y_I = y_A + y_B$. On conclut donc que $x_I = \frac{x_A + x_B}{2}$ et $y_I = \frac{y_A + y_B}{2}$. $\square$

Exemple 16. Le plan est muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On considère les points A $(1; -2)$, B $(6; -1)$, C $(8; 3)$ et D $(3; 2)$. Notons I le milieu de $[AC]$ et J le milieu de $[BD]$.

Les coordonnées de I sont $\left(\frac{1+8}{2}; \frac{-2+3}{2}\right)$ c'est-à-dire $\left(\frac{9}{2}; \frac{1}{2}\right)$ et celles de J sont $\left(\frac{6+3}{2}; \frac{-1+2}{2}\right)$ c'est-à-dire $\left(\frac{9}{2}; \frac{1}{2}\right)$. Ainsi, I et J ont les mêmes coordonnées donc $I = J$.

Ainsi, les diagonales de ABCD se coupent en leur milieu donc ABCD est un parallélogramme.

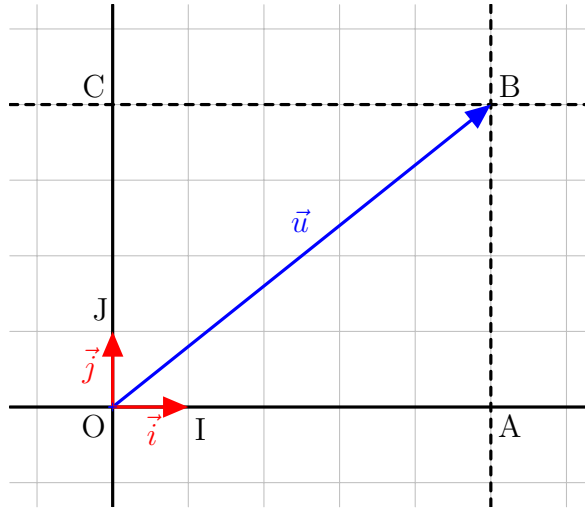
3) Distance dans un repère orthonormé

Propriété 17

Le plan est muni d'une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$. On considère un vecteur $\vec{u}(x; y)$. Alors,

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Démonstration. Dans le cas où la base est orthonormée, le parallélogramme OABC de la démonstration du théorème 6 est un rectangle.



Ainsi, en appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle OAB rectangle en A, il vient

$$\|\vec{u}\|^2 = OB^2 = OA^2 + AB^2 = OA^2 + OC^2 = \|x\vec{i}\|^2 + \|y\vec{j}\|^2 = (|x| \times \|\vec{i}\|)^2 + (|y| \times \|\vec{j}\|)^2.$$

Or, comme la base orthonormée, $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$ donc $\|\vec{u}\| = |x|^2 + |y|^2$. Or, pour tout réel k , $|k|^2 = k^2$ donc $\|\vec{u}\|^2 = x^2 + y^2$ et ainsi $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$. $\square$

Exemple 18. Le plan est muni d'une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$. Considérons le vecteurs $\vec{u} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2} \right)$. Alors,

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = \left(\frac{4}{4}\right)^2 = 1^2$$

donc $\|\vec{u}\| = 1$.

Corollaire 19

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On considère deux points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$. Alors,

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Démonstration. Les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont $(x_B - x_A; y_B - y_A)$ donc, d'après la propriété précédente,

$$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

$\square$

Exemple 20. Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On considère les points $A(2; -2)$, $B(6; -1)$ et $C(4; 7)$.

Montrons que le triangle ABC est rectangle en B.

Grâce au corollaire précédent,

$$AB = \sqrt{(6 - 2)^2 + (-1 - (-2))^2} = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17}$$

$$AC = \sqrt{(4 - 2)^2 + (7 - (-2))^2} = \sqrt{2^2 + 9^2} = \sqrt{85}$$

$$BC = \sqrt{(4 - 6)^2 + (7 - (-1))^2} = \sqrt{(-2)^2 + 8^2} = \sqrt{68}$$

Dès lors, $AB^2 + BC^2 = 17 + 68 = 85$ et $AC^2 = 85$ donc $AB^2 + BC^2 = AC^2$. Par la réciproque du théorème de Pythagore, on conclut que ABC est rectangle en B.

III. — Caractérisation analytique de la colinéarité

Dans tout ce paragraphe, le plan est muni d'une base $(\vec{i}, \vec{j})$.

Définition 21

Soit $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$. On définit le déterminant des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$), noté $\det(\vec{u}, \vec{v})$, par

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = xy' - yx'.$$

Exemple 22. Si $\vec{u}(-2; 3)$ et $\vec{v}(-1; -4)$ alors

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = (-2) \times (-4) - (-1) \times 3 = 8 + 3 = 11.$$

Théorème 23

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$.

Démonstration. Notons $(x; y)$ les coordonnées de $\vec{u}$ et $(x'; y')$ celle de $\vec{v}$.

- Supposons que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Alors, soit $\vec{u} = \vec{0}$ soit il existe un réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$.

▷ Si $\vec{u} = \vec{0}$ alors $x = y = 0$ donc $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0 \times y' - 0 \times x' = 0$.

▷ Si $\vec{v} = k\vec{u}$ alors $y' = ky$ et $x' = kx$ donc $\det(\vec{u}, \vec{v}) = x \times (ky) - y \times (kx) = kxy - kxy = 0$

Dans tous les cas, $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$.

- Réciproquement, supposons que $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$.

▷ Si $\vec{u} = \vec{0}$ alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires par définition.

▷ Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ alors $x \neq 0$ ou $y \neq 0$. Comme $xy' - yx' = 0$, on a $xy' = yx'$.

— Si $x \neq 0$ alors $y' = \frac{y}{x}x'$ donc, en posant $k = \frac{y}{x}$, on a $y = kx$ et $y' = kx'$ donc $\vec{v} = k\vec{u}$.

— Si $y \neq 0$ alors $x' = \frac{x}{y}y'$ donc, en posant $k = \frac{x}{y}$, on a $x = ky$ et $x' = ky'$ donc $\vec{v} = k\vec{u}$.

Dans les deux cas, il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{v} = k\vec{u}$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Ainsi, dans tous les cas, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont linéaires.

On a donc bien montré que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$. □

Exemple 24. On considère les vecteurs $\vec{u}(1; \sqrt{3})$ et $\vec{v}(\sqrt{2}; \sqrt{6})$. Alors,

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = 1 \times \sqrt{6} - \sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6} - \sqrt{2 \times 3} = \sqrt{6} - \sqrt{6} = 0$$

donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Exercice 25. Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On considère les points A(1; 1), B(6; 3), C(7; -1), D(2; -3) et E(-1; -2).

1. Montrer que ABCD est un parallélogramme.
2. Déterminer les coordonnées du point F tel que ADEF soit un parallélogramme.
3. Montrer que les points A, C et F sont alignés.

Solution

1. On a $\overrightarrow{AB}(6-1; 3-1)$ donc $\overrightarrow{AB}(5; 2)$ et $\overrightarrow{DC}(7-2; -1-(-3))$ donc $\overrightarrow{DC}(5; 2)$. Ainsi, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ donc ABCD est un parallélogramme.
2. On a $\overrightarrow{AD}(2-1; -3-1)$ donc $\overrightarrow{AD}(1; -4)$ et $\overrightarrow{FE}(-1-x_F; -2-y_F)$. Comme ADEF est un parallélogramme, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{FE}$ donc $1 = -1 - x_F$ et $-4 = -2 - y_F$ et ainsi $x_F = -2$ et $y_F = 2$. On conclut que F(-2; 2).
3. On a $\overrightarrow{AF}(-2-1; 2-1)$ donc $\overrightarrow{AF}(-3; 1)$ et $\overrightarrow{AC}(7-1; -1-1)$ donc $\overrightarrow{AC}(6; -2)$. Dès lors, $\det(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AC}) = -3 \times (-2) - 6 \times 1 = 6 - 6 = 0$ donc $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires. On conclut que A, C et F sont alignés.