⧫ Chapitre 7. — Probabilités sur un ensemble fini

I. — Expériences aléatoires et évènements

1) Expériences aléatoires

Définition 1

Une expérience aléatoire est une expérience qui possède les 3 propriétés suivantes :
- l'ensemble des résultats possibles de l'expérience est connu *a priori* ;
- on peut répéter l'expérience dans les mêmes conditions ;
- le résultat d'une réalisation de l'expérience est le fruit du hasard.

Exemple 2.

1. Lancer une pièce équilibrée est une expérience aléatoire. Il y a deux résultats possibles : *pile* ou *face*, on peut répéter l'expérience autant de fois qu'on le désire et, si on lance la pièce, le résultat est bien le fruit du hasard.
2. De même, lancer un dé cubique équilibré est une expérience aléatoire. C'est un exemple historique important. En effet, le mot « aléatoire » vient du latin *alea* qui signifie *dé* et le mot « hasard » vient de l'arabe *al-zahr* qui signifie également *dé*.
3. Un tirage au loto est une expérience aléatoire.

Remarque 3. Toutes les expériences dont les résultats sont le fruit du hasard ne sont pas des expériences aléatoires. Par exemple, si on rencontre quelqu'un dans la rue « par hasard », cela ne constitue pas une expérience aléatoire.

Définition 4

L'ensemble des résultats (ou issues) possibles d'une expérience aléatoire est appelé l'univers associé à cette expérience. On le note, en général, Ω.

Exemple 5.

1. L'univers du lancer de pièce équilibré est $\Omega = \{pile, face\}$.
2. L'univers du lancer de dé cubique équilibré est $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
3. L'univers du tirage du loto est l'ensemble de toutes les combinaisons possibles. Il y en a des millions !

Remarque 6. Les trois expériences de l'exemple précédent ont un univers qui contient un nombre fini d'éléments (2 pour la première, 6 pour la deuxième et quelques millions pour la troisième). Il existe des expériences dont l'univers contient une infinité d'éléments (par exemple, choisir un réel au hasard dans l'intervalle $[0 ; 1]$).

Dans tout ce chapitre, nous ne considérerons que des expériences ayant un univers fini.

2) Événements

Dans tout ce paragraphe, on considère une expérience aléatoire. On note Ω son univers et on suppose que Ω est fini.

Définition 7

On définit :

1. un **évènement** lié à cette expérience comme étant une partie quelconque de Ω ;
2. un **évènement élémentaire** lié à cette expérience comme étant une partie de Ω ne contenant qu'un seul élément.

Si A est un évènement et si $a \in \mathrm{A}$, on dit que l'issue a réalise l'évènement A. Ainsi, un évènement élémentaire est un évènement qui n'est réalisé que par une seule issue.

Remarque 8. Cette vision est la vision moderne des évènements comme étant des parties de l'univers. Cependant, historiquement, les évènements ont d'abord été définis à m'aide de phrases les décrivant. On a gardé aujourd'hui cette double vision et il faut savoir passer de l'une à l'autre.

Exemple 9. . — On lance un dé cubique équilibré. L'univers est alors $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

1. L'évènement A : « Obtenir 6 » est l'évènement $\mathrm{A} = \{6\}$. C'est un évènement élémentaire. Il n'est réalisé que par l'issue 6.
2. L'évènement B : « Obtenir un chiffre pair » est l'évènement $\mathrm{B} = \{2, 4, 6\}$. Il est réalisé par les trois issues 2, 4 et 6.
3. L'évènement C : « Obtenir un chiffre supérieur à 7 » est l'évènement $\mathrm{C} = \varnothing$. Il n'est réalisé par aucune issue de l'expérience.
4. L'évènement D : « Obtenir un chiffre inférieur ou égal à 6 » est l'évènement $\mathrm{D} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \Omega$. Il est réalisé par toutes les issues de l'expérience.

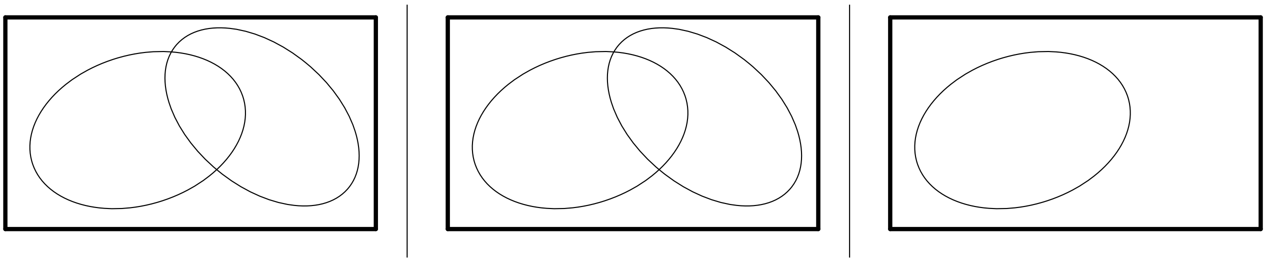
Définition 10

1. L'évènement $\varnothing$ est appelé l'évènement impossible. Il n'est réalisé par aucune issue de l'expérience.
2. L'évènement Ω est appelé l'évènement certain. Il est réalisé par toutes les issues de l'expérience.

Définition 11

Soit A et B deux évènements de Ω. On définit alors les évènements :

1. « A ou B » qui est réalisé si (au moins) l'un des deux évènements A ou B est réalisé. D'un point de vue ensembliste, il correspond à $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$ (union de A et B).
2. « A et B » qui est réalisé si les deux évènements A et B sont réalisés (simultanément). D'un point de vue ensembliste, il correspond à $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ (intersection de A et B).
3. « contraire de A » qui est réalisé si A ne l'est pas. D'un point de vue ensembliste, il correspond au complémentaire de A dans Ω, noté $\overline{\mathrm{A}}$, c'est-à-dire à l'ensemble des éléments de Ω qui n'appartiennent pas à A.



Exemple 12. — On lance un dé et on considère les évènements A : « Obtenir un chiffre pair » et B : « Obtenir un chiffre supérieur ou égal à 4 ».

D'un point de vue ensembliste, $\mathrm{A} = \{2,4,6\}$ et $\mathrm{B} = \{4,5,6\}$

Alors, $\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \{2,4,5,6\}$, $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \{4,6\}$, $\overline{\mathrm{A}} = \{1,3,5\}$, $\overline{\mathrm{B}} = \{1,2,3\}$, $\overline{\mathrm{A}} \cup \mathrm{B} = \{1,3,4,5,6\}$ et $\overline{\mathrm{A}} \cap \mathrm{B} = \{5\}$.

On peut remarquer que $\overline{\mathrm{A}}$: « Obtenir un chiffre impair », $\overline{\mathrm{B}}$: « Obtenir un chiffre inférieur ou égal à 3 », $\overline{\mathrm{A}} \cup \mathrm{B}$: « Ne pas obtenir 2 » et $\overline{\mathrm{A}} \cap \mathrm{B}$: « Obtenir 5 ».

Propriété 13

Soit A et B deux évènements de Ω. Alors,

$$\overline{\mathrm{A} \cap \mathrm{B}} = \overline{A} \cup \overline{B} \qquad \text{et} \qquad \overline{\mathrm{A} \cup \mathrm{B}} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

Définition 14

On dit que deux évènements A et B sont incompatibles (ou disjoints) si $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \varnothing$.

Autrement dit, deux évènement sont incompatibles s'il n'existe pas d'issue qui les réalise tous les deux.

Exemple 15.

1. On lance un dé cubique. Les évènements A :« Obtenir un chiffre pair » et B : « Obtenir 5 » sont incompatibles.
2. De manière générale, pour tout évènement A, les évènements A et $\overline{\mathrm{A}}$ sont incompatibles.

II. — Loi de probabilité sur un univers fini

1) Définition

Définition 16

On considère une expérience aléatoire. On suppose que son univers Ω est constitué de n éléments $x_1, x_2, ..., x_n$ c'est-à-dire $\Omega = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Définir une loi (ou une distribution) de probabilité P sur Ω, c'est associer à chaque issue x_i un réel p_i de telle façon que :

1. pour tout entier i entre 1 et n, $0 \leqslant p_i \leqslant 1$;
2. $p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$.

Autrement dit, une loi de probabilité P sur Ω est une fonction $P : \Omega \to [0\,;1]$ telle que $P(x_1) + P(x_2) + \cdots + P(x_n) = 1$.

Remarque 17. La plupart du temps, on dira simplement « probabilité » au lieu de « loi de probabilité ».

Exemple 18.

1. Lorsqu'on lance une pièce, l'univers est $\Omega = \{pile; face\}$. On définit donc une probabilité P sur Ω en définissant $P(pile)$ et $P(face)$. Par exemple, on définit une probabilité P sur Ω en posant $P(pile) = \frac{1}{3}$ et $P(face) = \frac{2}{3}$ et on en définit une autre en posant $P(pile) = \frac{3}{5}$ et $P(face) = \frac{2}{5}$. Il y a donc plusieurs probabilités possibles.

   Si on sait que la pièce est bien équilibré, on choisira la probabilité qui donne la même valeur pour *pile* et *face* c'est-à-dire la probabilité P définie par $P(pile) = \frac{1}{2}$ et $P(face) = \frac{1}{2}$.
2. De même, si on lance un dé cubique équilibré, l'univers est $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et on choisira sur Ω la probabilité P définie par $P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6) = \frac{1}{6}$.

Définition 19

Lorsqu'on a choisi une probabilité P sur l'univers Ω d'une expérience aléatoire, on dit qu'on a modélisé l'expérience par la loi de probabilité P sur Ω.

Définition 20

On considère une expérience aléatoire modélisée par une probabilité P sur son univers Ω. Si A est un évènement de Ω alors on définit la probabilité de A, notée $P(\mathrm{A})$, comme la somme des probabilités des issues qui réalisent A.

Exemple 21. — On lance un dé cubique équilibré. On modélise cette expérience par la probabilité P telle que $P(a) = \frac{1}{6}$ pour tout issue a de l'expérience.

Considérons l'évènement A : « Obtenir un chiffre pair ». Alors, $\mathrm{A} = \{2, 4, 6\}$ donc $P(\mathrm{A}) = P(2) + P(4) + P(6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$ donc $P(\mathrm{A}) = \frac{1}{2}$.

Propriété 22

On considère une expérience aléatoire modélisée par une probabilité P sur son univers Ω. Alors,

1. $P(\varnothing) = 0$.
2. $P(\Omega) = 1$.
3. Si A et B sont deux évènements tels que $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$ alors $P(\mathrm{A}) \leqslant P(\mathrm{B})$.
4. Si A est un évènement alors $0 \leqslant P(\mathrm{A}) \leqslant 1$.

Remarque 23. Quand on calcule des probabilités, il est nécessaire de toujours s'assurer que les résultats obtenus sont des réels compris entre 0 et 1.

2) Équiprobabilité

Définition 24

On considère une expérience aléatoire et Ω son univers. La probabilité telle que toutes les issues de Ω aient la même probabilité est appelé l'équiprobabilité sur Ω.

Remarque 25. C'est la loi qu'on a utilisé dans les exemples précédents.

De manière générale, on modélise par l'équiprobabilité à chaque fois qu'on lance des objets « équilibrés » (pièce, dé) ou qu'on effectue des tirages « au hasard » (d'une carte dans un jeu, d'une boule dans une urne, d'un objet dans un sac...)

Exemple 26. On considère une urne contenant 2 boules rouges et 3 boules noires. On tire une boule au hasard. L'univers de cette expérience est $\{R_1, R_2, N_1, N_2, N_3\}$. On modélise le tirage par l'équiprobabilité P sur Ω. On a donc $P(a) = \frac{1}{5}$ pour tout issue a de l'expérience. Si on note A : « Tirer une boule rouge » et B : « Tirer une boule noire » alors $P(\mathrm{A}) = 2 \times \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$ et $P(\mathrm{B}) = 3 \times \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$.

Pour la même expérience, on pourrait ne s'intéresser qu'aux couleurs des boules. L'univers serait alors $\Omega' = \{rouge, noir\}$ et, dans ce cas, le modèle précédent conduit à choisir comme modèle sur Ω la probabilité P' telle que $P'(rouge) = \frac{2}{5}$ et $P'(noir) = \frac{3}{5}$. Dans ce cas, P' n'est pas l'équiprobabilité sur Ω'.

Propriété 27

On considère une expérience aléatoire et $\Omega = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ son univers. Si P est l'équiprobabilité sur Ω alors :

1. pour tout entier i compris entre 1 et n, $P(x_i) = \frac{1}{n}$;
2. si A est un évènement réalisé par exactement m issues différentes alors $P(\mathrm{A}) = \frac{m}{n}$.

Exemple 28. — On tire une carte au hasard dans un jeu de 32. On considère les évènements A : « Obtenir le roi de trêfle », B : « Obtenir un as » et C : « Obtenir un cœur ».

On modélise le tirage au hasard par l'équiprobabilité P sur l'ensemble des 32 cartes. Comme il y a une seule issue qui réalise A, $P(\mathrm{A}) = \frac{1}{32}$.

Comme il y a 4 issues qui réalisent B, $P(\mathrm{B}) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$.

Comme il y a 8 issues qui réalisent C, $P(\mathrm{C}) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$.

3) Union, intersection et complémentaire

Propriété 29

On considère une expérience aléatoire modélisée par une probabilité P sur son univers Ω. Soit A et B deux évènements de Ω. Alors,

1. $P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = P(\mathrm{A}) + P(\mathrm{B}) - P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$.
2. $P(\overline{\mathrm{A}}) = 1 - P(\mathrm{A})$.

Exemple 30. — Dans un club de sport, il y a 80 membres. Ceux-ci peuvent pratiquer plusieurs sports dont le tennis et la natation. On sait que 20 membres pratiquent le tennis, 15 membres pratiquent la natation et, parmi les membres précédents, 5 membres pratiquent les deux sports. On sélectionne un adhérent de ce club au hasard.

On considère les évènements suivants :

1. A : « L'adhérent pratique le tennis » ;
2. B : « L'adhérent pratique la natation » ;
3. C : « L'adhérent pratique le tennis et la natation » ;
4. D : « L'adhérent pratique le tennis ou la natation » ;
5. E : « L'adhérent ne pratique pas la natation » ;

6. F : « L'adhérent ne pratique ni la natation ni le tennis ».

On modélise le tirage au hasard par l'équiprobabilité sur l'ensemble des adhérents.
On a alors, d'après l'énoncé, $P(\mathrm{A}) = \frac{20}{80} = \frac{1}{4}$, $P(\mathrm{B}) = \frac{15}{80} = \frac{3}{16}$ et $P(\mathrm{C}) = \frac{5}{80} = \frac{1}{16}$.
Or, $\mathrm{C} = \mathrm{A} \cap \mathrm{D}$ et $D = \mathrm{A} \cup \mathrm{B}$ donc $P(\mathrm{D}) = P(\mathrm{A}) + P(\mathrm{B}) - P(\mathrm{C}) = \frac{1}{4} + \frac{3}{16} - \frac{1}{16}$ c'est-à-dire $P(\mathrm{D}) = \frac{3}{8}$.
On a $\mathrm{E} = \overline{\mathrm{A}}$ donc $P(\mathrm{E}) = 1 - P(\mathrm{A}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.
On a $\mathrm{F} = \overline{\mathrm{A}} \cap \overline{\mathrm{B}} = \overline{\mathrm{A} \cup B} = \overline{\mathrm{D}}$ donc $P(\mathrm{F}) = 1 - P(\mathrm{D}) = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$.

Remarque 31.

1. Si deux évènements A et B sont incompatibles alors $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \varnothing$ donc $P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = 0$ et ainsi $P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = P(\mathrm{A}) + P(\mathrm{B})$.

2. L'égalité $P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = P(\mathrm{A}) + P(\mathrm{B}) - P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$ peut aussi se réécrire

$$P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = P(\mathrm{A}) + P(\mathrm{B}) - P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B})$$

ou encore

$$P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) + P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = P(\mathrm{A}) + P(\mathrm{B})$$