⧫ Chapitre 6. — Généralités sur les fonctions

I. — Notion de fonction

Définition 1

Soit E une partie de $\mathbb{R}$. Une fonction définie sur E est un procédé qui permet d'associer à chaque réel $x \in E$ un unique nombre y.

Remarque 2. Le procédé qui définit une fonction peut prendre des aspects variés : tableau, courbe, formule, algorithme de calcul, situation concrète...

La seule contrainte est que si $x \in E$ alors le procédé doit lui associer un nombre et un seul.

Exemple 3. Les procédés ci-dessous définissent-il des fonctions et, si oui, sur quel ensemble E ?

Procédé 1. — À tout nombre réel, on associe ce nombre auquel on ajoute son carré.

Procédé 2. — À tout nombre réel $x \geqslant 0$, on associe $y \in \mathbb{R}$ tel que $y^2 = x$.

Procédé 3. — À la masse x d'une lettre, on associe le prix à payer pour l'expédier en lettre prioritaire au tarif en vigueur en 2019.

Masse jusqu'à	20 g	100 g	250 g	500 g	3000 g
Tarif en €	1,05	2,10	4,20	6,30	8,40

Procédé 4. — Au prix payé pour expédier une lettre au tarif prioritaire, on associe son poids selon le tableau précédent.

Procédé 5. — Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) et on considère le cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 4.

À tout réel $x \in [-4\,;4]$, on associe $y \in \mathbb{R}$ tel que le point $M\,(x\,;y)$ appartienne à $\mathscr{C}$.

Procédé 6. — Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). On considère les points A$(-1\,;4)$ et B$(2\,;1)$.

À tout réel $x \in \mathbb{R}$, on associe $y \in \mathbb{R}$ tel que le point $M\,(x\,;y)$ appartienne à (AB).

Définition 4

Soit f une fonction définie sur un ensemble E.

1. L'ensemble E s'appelle l'ensemble de définition de f. On le note D_f.
2. Soit $x \in E$. L'unique nombre y associé à x par f est appelé l'image de x par f. On le note $f(x)$ (ce qui se lit « f de x »).
3. Si y est un réel alors tout nombre x tel que $f(x) = y$ est appelé un antécédent de y par f.

Remarque 5.

1. La notation $f(x)$ n'a rien à voir avec un produit (ce n'est pas $f \times x$ qui ne veut rien dire puisque f n'est pas un nombre !).
2. Il ne faut pas confondre la fonction f (c'est-à-dire le procédé) et le nombre $f(x)$.

3. Par définition, pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, l'image de x par f est unique. En revanche, un même réel y peut avoir plusieurs antécédents (voir, par exemple, le procédé 3).

Exemple 6.

1. Soit f la fonction définie par le procédé 1. Alors, $\mathcal{D}_f = R$ et, pour tout réel x, $f(x) = x + x^2$. Par exemple, l'image de 2 est $f(2) = 2+2^2 = 6$ et l'image de -3 est $f(-3) = -3+(-3)^2 = 6$. Ainsi, le nombre 6 admet (au moins) deux antécédents par f : 2 et -3.
2. Soit g la fonction définie par le procédé 3. Alors, $\mathcal{D}_f =]0\,;3000]$. L'image de 10 par g est $g(10) = 1{,}05$ et $g(1000) = 8{,}40$.

   Le nombre 2 n'a pas d'antécédents par g. En revanche, le nombre 2,10 a une infinité d'antécédents par g : ce sont tous les nombres de $]100\,;250]$.
3. Soit h la fonction définie par le procédé 6. Alors, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

   L'image de 1 est $h(1) = 2$. Par cette fonction, tout réel a un antécédent et un seul. Par exemple, l'unique antécédent de 4 est -1.

II. — Cas particulier des fonctions définies par une formule

Parmi toutes les façons de définir une fonction, la plus courant est de donner une formule permettant de calculer l'image de tout nombre appartenant à l'ensemble de définition.

Considérons, par exemple, la fonction f qui à tout réel positif ou nul associe la racine carrée de ce réel à laquelle on ajoute le double de ce réel. Ainsi, f est la fonction définie sur $\mathcal{D}_f = [0\,;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x} + 2x$.

On traduit symboliquement ceci par la notation suivante :

$$f: \begin{array}{ccc} [0\,;+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x}+2x \end{array}$$

L'image de 4 par cette fonction est $f(4) = \sqrt{4} + 2 \times 4 = 10$.

Dans l'écriture précédente, le nombre x est appelé la variable. La lettre utilisée pour cette variable est sans importance. Ainsi, les fonction $f : x \mapsto x^2 + 3$ et $g : t \mapsto t^2 + 3$ sont identiques.

Généralement, l'ensemble de définition d'une fonction est donné ou défini par le contexte.

Si une fonction f est définie par une formule et si l'ensemble de définition n'est pas préciser alors $\mathcal{D}_f$ est, implicitement, l'ensemble des réels x tels que $f(x)$ ait un sens.

Exemple 7. Dans chaque cas, déterminer l'ensemble de définition de la fonction.

1. $f : x \mapsto x^2 + 3$ **2.** $g : t \mapsto \frac{1}{t+2}$ **3.** $h : u \mapsto \sqrt{3-u}$.

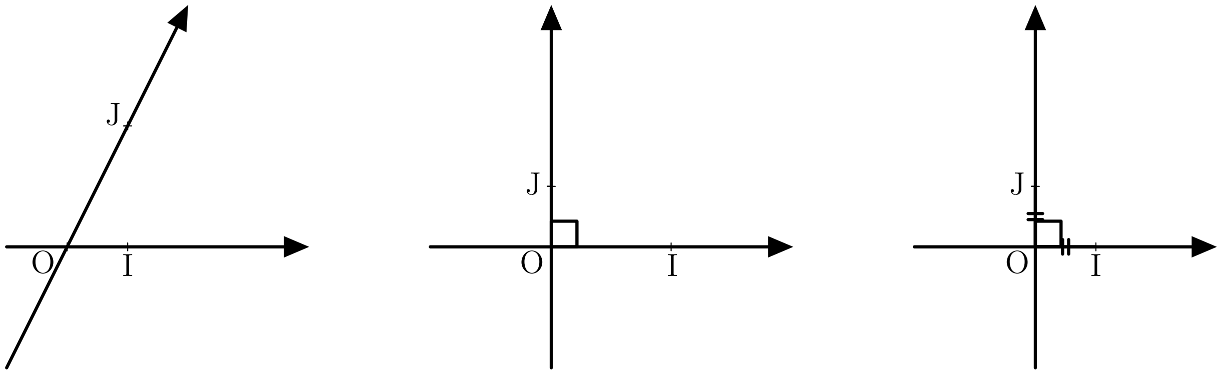
III. — Courbe représentative d'une fonction

1) Repère et coordonnées

Définition 8

Un repère du plan est la donnée de trois points O, I et J non alignés.

Le droite (OI) est alors appelée l'axe des abscisses et la droite (OJ) est appelée l'axe de ordonnées. Si les droites (OI) et (OJ) sont perpendiculaires, on dit que le repère est orthogonal. Si, de plus, OI = OJ, on dit que le repère est orthonormé ou orthonormal.

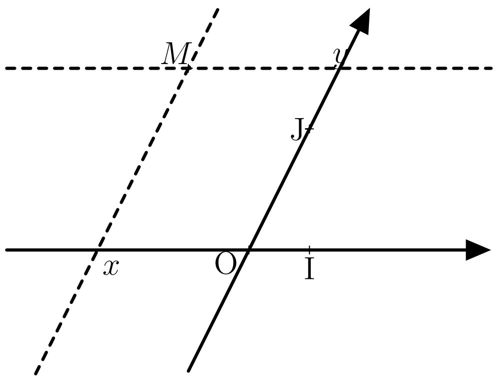


repère quelconque — repère orthogonal — repère orthonormé

La donnée d'un repère revient donc à la donnée de deux droites graduées, les unités sur chaque axe étant déterminées par les longueurs OI et OJ.

On fixe un repère (O, I, J) du plan.

On considère un point M. La parallèle à (OJ) passant par M coupe l'axe (OI) en un point N et la parallèle à (OI) passant par M coupe l'axe (OJ) en P. Sur la droite réelle (OI), le point N correspond à un nombre x et, sur la droite réelle (OJ), le point P correspond à un réel y.



Définition 9

1. Le nombre x s'appelle l'abscisse de M et on le note x_M.
2. Le nombre y s'appelle l'ordonnée de M et on le note y_M.
3. Les nombres x_M et y_M s'appellent les coordonnées de M. On note alors $M\,(x_M\,;y_M)$.

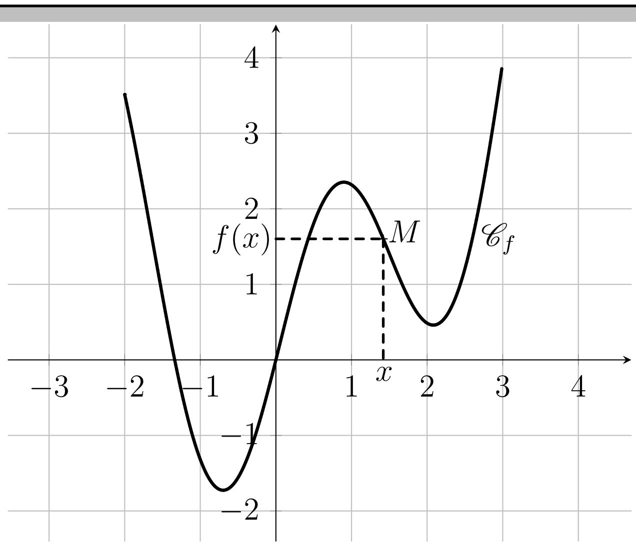
2) Courbe représentative d'une fonction

Définition 10

Soit (O, I, J) un repère du plan. Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathcal{D}_f$.

La courbe représentative (ou la représentation graphique) de f dans (O, I, J) est l'ensemble des points M du plan de coordonnées $(x\,;f(x))$ lorsque x prend toutes les valeurs possibles dans $\mathcal{D}_f$.

On la note $\mathscr{C}_f$.

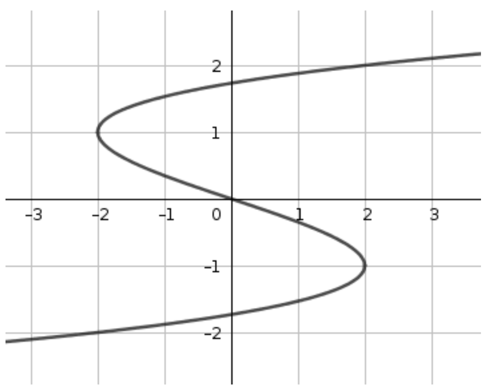


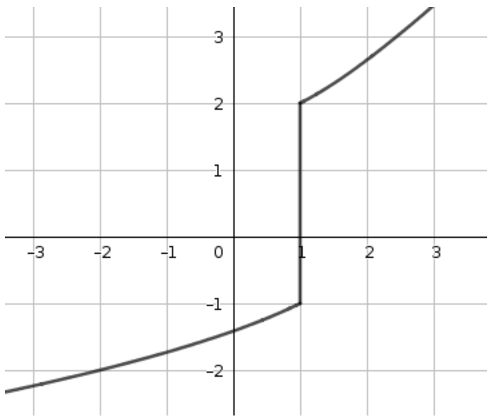
Remarque 11. Ainsi, par définition, un point M du plan de coordonnées $(x_M\,;y_M)$ appartient à $\mathscr{C}_f$ si et seulement si $x_M \in \mathcal{D}_f$ et $y_M = f(x_M)$.

Exemple 12. Considérons la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$ définie sur $\mathbb{R}$.

1. Le point A de coordonnées $(1\,;0{,}5)$ appartient-il à $\mathscr{C}_f$?
2. Le point B de coordonnées $(2\,;0{,}4)$ appartient-il à $\mathscr{C}_f$?
3. Le point C de coordonnées $(-1\,;a)$ appartient à $\mathscr{C}_f$. Quelle est la valeur de a ?
4. Quelles sont les valeurs du réel x pour lesquelles le point de coordonnées $(x\,;1)$ appartienne à $\mathscr{C}_f$?

Remarque 13. Toute fonction peut être représentée par une courbe mais toute courbe n'est pas la représentation graphique d'une fonction. En effet, par définition, tout réel $x \in \mathcal{D}_f$ doit avoir une image et une seule donc deux points différents ne peuvent pas avoir à la même abscisse.





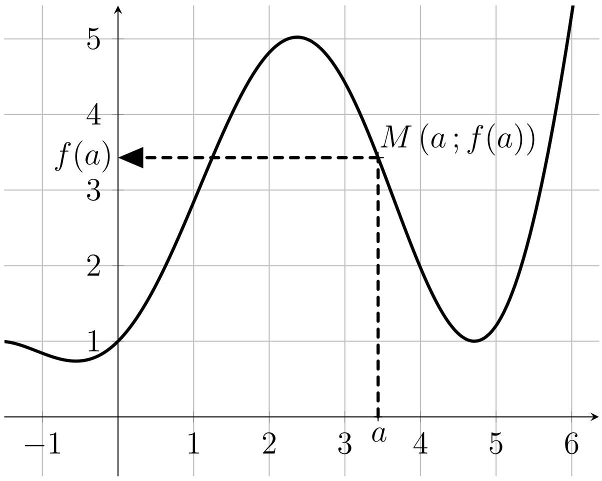
Les courbes ci-dessus ne représente pas des fonctions. Pour celle de gauche, il y a 3 points de la courbe ayant la même abscisse -1 et pour celle de droite, il y a une infinité de points ayant une abscisse égale à 1.

3) Lectures graphiques

a) Lecture d'images

Lorsqu'on dispose de la courbe d'une fonction f, on peut déterminer des images par la fonction f à l'aide d'une lecture graphique.

Si on cherche l'image par f d'un nombre a, il suffit de placer a sur l'axe des abscisses et de lire l'ordonnée du point de la courbe d'abscisse a.

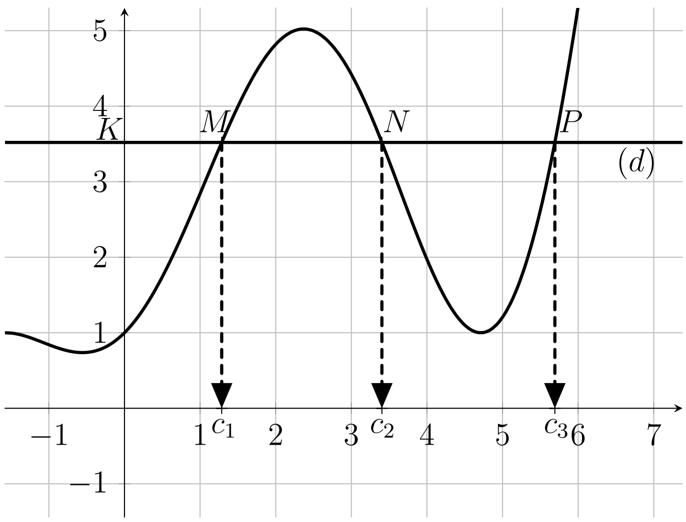


Ce procédé est simple mais limité par la précision permise par le graphique.

b) Lecture d'antécédents

De même, lorsqu'on dispose de la courbe d'une fonction f, on peut déterminer le(s) antécédent(s) d'un réel par la fonction f à l'aide d'une lecture graphique.

Si on cherche les antécédents par f d'un nombre k, il suffit de placer sur l'axe des ordonnées le point K d'ordonnée k, de tracer la droite (d) passant par K et parallèle à l'axe des abscisses et de lire les abscisses de tous les points d'intersection de (d) avec la courbe de f.



Comme pour les déterminations graphiques d'images, ce procédé simple mais limité par la précision permise par le graphique.

Par définition, chercher les antécédents par une fonction f d'un nombre k, c'est déterminer l'ensemble des réels $x \in \mathcal{D}_f$ tels que $f(x) = k$. Cela revient donc à résoudre l'équation $f(x) = k$. Ainsi, le procédé précédent donne une méthode de résolution graphique d'une équation.

c) Résolution graphique d'équation et d'inéquation

Soit k un réel. Comme on vient de le dire, la détermination des antécédents de k revient à résoudre l'équation $f(x) = k$.

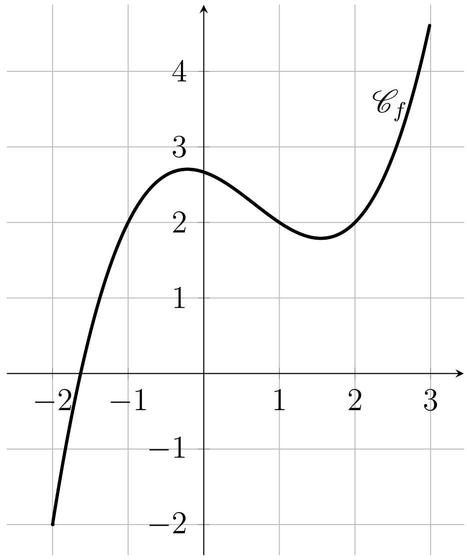
De la même façon, on peut résoudre graphiquement une inéquation du type $f(x) < k$ ou $f(x) > k$: on trace, comme précédemment, la droite (d) parallèle à l'axe des abscisses et passant par le point $K\,(0\,;k)$ et :

— les solutions de $f(x) < k$ sont les abscisses des points de $\mathscr{C}_f$ situés en dessous de (d).

— les solutions de $f(x) > k$ sont les abscisses des points de $\mathscr{C}_f$ situés au-dessus de (d).

Exemple 14. On considère la courbe d'une fontion f définie sur $[-2\,;3]$ représentée ci-contre.

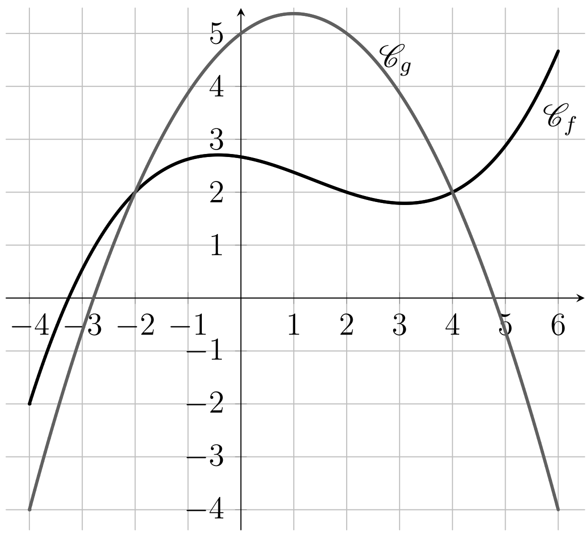
1. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 2$.
2. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) > 2$ puis
3. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \leqslant 1$.
4. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \geqslant 5$.



Sur le même principe, si on dispose des courbes de deux fonctions f et g définies sur un ensemble commun E, on peut résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$ et l'inéquation $f(x) < g(x)$:

1. L'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ est l'ensemble des abscisses des points communs à $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.
2. L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) < g(x)$ est l'ensemble des abscisses x en lesquelles le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse x est en dessous du point $\mathscr{C}_g$ d'abscisse x.

Exemple 15. On considère deux fonctions f et g définies sur $[-4\,;6]$ dont on a tracé les courbes représentatives sur le graphique ci-dessous.



1. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$.
2. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) > g(x)$.