⧫ Chapitre 5. — Intervalles réels et inégalités

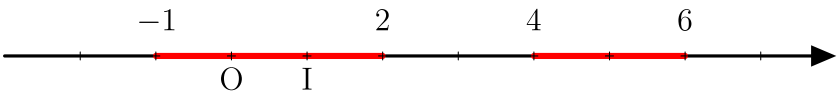
I. — Définition

Définition 1

Un intervalle réel est une partie I de $\mathbb{R}$ possédant la propriété suivante : pour tous réels x et y, si x et y appartiennent à I alors tout réel z compris entre x et y appartient aussi à I.

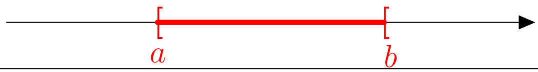
De façon imagée, un intervalle réel est une partie de $\mathbb{R}$ « sans trou ». Autrement dit, lorsqu'on représente un intervalle sur l'axe réel, on peut le faire sans lever le stylo.

Ainsi, l'ensemble représenté en rouge ci-dessous n'est pas un intervalle :



En effet, 1 et 5 appartiennent à cet ensemble mais pas 3 qui est pourtant compris entre les 2.

On distingue 9 types différents d'intervalles réels. Dans ce qui suit, a et b désignent des réels.

L'intervalle noté :	est l'ensemble des réels x tels que :	et on peut le représenter sur la droite réelle par :
$[a, b]$	$a \leqslant x \leqslant b$	
$]a, b[$	$a < x < b$	
$[a, b[$	$a \leqslant x < b$	
$]a, b]$	$a < x \leqslant b$	
$[a\,;+\infty[$	$x \geqslant a$	
$]a\,;+\infty[$	$x > a$	
$]-\infty\,;b]$	$x \leqslant b$	
$]-\infty\,;b[$	$x < b$	
$]-\infty\,;+\infty[= \mathbb{R}$	pas de condition	

Les nombres a et b sont appelés les bornes de l'intervalle.

$[a\,;b]$ est un intervalle fermé ; les crochets sont fermés c'est-à-dire qu'ils sont tournés vers l'intérieur de l'intervalle. Dans ce cas, les bornes appartiennent à l'intervalle.

$]a\,;b[$ est un intervalle ouvert ; les crochets sont ouverts c'est-à-dire qu'ils sont tournés vers l'extérieur de l'intervalle. Dans ce cas, les bornes n'appartiennent pas à l'intervalle.

Les intervalles $]-\infty\,;b]$ et $[a\,;+\infty[$ sont également appelés intervalles fermés et les intervalles $]-\infty\,;b[$ et $]a\,;+\infty[$ sont également appelés intervalles ouverts. Les autres intervalles ne sont ni ouvert ni fermés (sauf $\mathbb{R} =]-\infty\,;+\infty[$ qui est à la fois ouvert et fermé).

Le symbole $+\infty$ se lit « plus l'infini » et le symbole $-\infty$ se lit « moins l'infini ». Ce ne sont pas de réels et les crochets sont toujours ouverts en $+\infty$ et $-\infty$.

On note également $\mathbb{R}_+$ l'intervalle $[0\,;+\infty[$, $\mathbb{R}_-$ l'intervalle $]-\infty\,;0]$, $\mathbb{R}_+^*$ l'intervalle $]0\,;+\infty[$ et $\mathbb{R}_-^*$ l'intervalle $]-\infty\,;0[$

Exemple 2.

1. L'ensemble des réels x tels que $-1 \leqslant x < 2$ est $[-1\,;2[$.
2. $[2\,;5]$ désigne l'ensemble des réels x tels que $2 \leqslant x \leqslant 5$.
3. L'ensemble des réels x tels que $x > -5$ est $]-5\,;+\infty[$.
4. $]-\infty\,;4]$ est l'ensemble des réels x tels que $x \leqslant 4$.
5. L'ensemble des réels x tels que $1 \geqslant x > -4$ est $]-4\,;1]$.
6. L'ensemble des réels x tels que $10 > x$ est $]-\infty\,;10[$

II. — Union et intersection d'intervalles

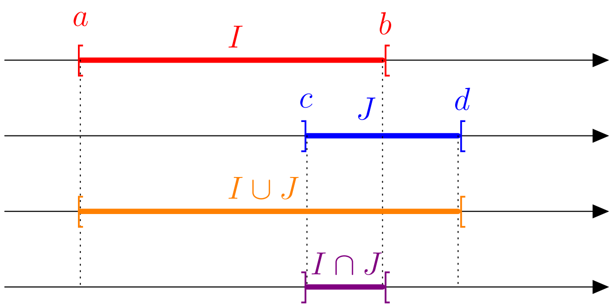
Dans tout ce paragraphe, I et J désignent des intervalles réels.

Définition 3

1. On appelle *union* (ou *réunion*) de I et J l'ensemble des réels x qui appartiennent à au moins un des deux intervalles I ou J. Cet ensemble se note $I \cup J$, ce qui se lit « I union J ».
   Ainsi, $x \in I \cup J$ si et seulement si $x \in I$ OU $x \in J$.
2. On appelle *intersection* de I et J l'ensemble des réels x qui appartiennent à la fois aux deux intervalles I et J. Cet ensemble se note $I \cap J$, ce qui se lit « I inter J ».
   Ainsi, $x \in I \cap J$ si et seulement si $x \in I$ ET $x \in J$.

Remarque 4. Dans la définition de l'union, le « OU » n'est pas exclusif c'est-à-dire que lorsqu'on dit $x \in I$ OU $x \in J$, x peut très bien appartenir à la fois à I et à J.

Interprétation graphique



Dans cet exemple, $I = [a\,;b[$, $J =]c\,;d[$, $I \cup J = [a\,;d[$ et $I \cap J =]c\,;b[$.

Exemple 5.

1. Considérons $E = [-1\,;2] \cup [3\,;7[$. Alors, $10 \notin E$, $0 \in E$, $2 \in E$, $7 \notin E$, $5 \in E$ et $-5 \notin E$.
2. Considérons $F = [-2\,;5] \cap]0\,;7[$. Alors, $3 \in F$, $-2 \notin F$, $2 \in F$, $7 \notin F$, et $0 \notin F$.
   On peut remarquer que $F =]0\,;5]$.

Remarque 6.

1. Il se peut que $I \cap J$ soit vide. Dans ce cas, on dit que I et J sont disjoints.
2. Si $I \cap J$ n'est pas vide alors $I \cap J$ et $I \cup J$ sont des intervalles. En revanche, si $I \cap J$ est vide alors $I \cup J$ n'est pas un intervalle.

III. — Ordre et opérations

Propriété 7

1. On ne change pas le sens d'une inégalité si :
   - on ajoute ou on soustraire un même nombre aux deux membres ;
   - on multiplie ou on divise les deux membres par un même nombre strictement positif.
2. En revanche, on change le sens d'une inégalité si on multiple ou on divise les deux membres par un même nombre strictement négatif.

Exemple 8. Soit x un réel tel que $x \leqslant 3$.

1. $x + 1 \leqslant 3 + 1$ c'est-à-dire $x + 1 \leqslant 4$.
2. $x - 2 \leqslant 3 - 2$ c'est-à-dire $x - 2 \leqslant 1$.
3. $5x \leqslant 5 \times 3$ c'est-à-dire $5x \leqslant 15$ (car $5 > 0$).
4. $\frac{x}{4} \leqslant \frac{3}{4}$ car $4 > 0$.
5. $-2x \geqslant -2 \times 3$ c'est-à-dire $-2x \geqslant -6$ (car $-2 < 0$).
6. $\frac{x}{-5} \geqslant \frac{3}{-5}$ c'est-à-dire $-\frac{x}{5} \geqslant -\frac{3}{5}$ car $-5 < 0$.

Remarque 9. Ce qui précède peut s'appliquer directement sur une double inégalité. Par exemple, si x est un réel tel que $1 < x \leqslant 3$ alors $-2 > -2x \geqslant -6$ car on a multiplié par $-2 < 0$ donc on a changé le sens des inégalités.

Propriété 10

1. On peut toujours additionner membre à membre deux inégalités qui sont dans le même sens.
2. On peut multiplier membre à membre deux inégalités qui sont dans le même sens si elles ne comportent que des nombres positifs.
3. On ne peut pas soustraire ni diviser membre à membre des inégalités.

Exemple 11. Soit x et y deux réels tels que $x > 3$ et $y > 2$.

1. On peut dire que $x + y > 3 + 2$ c'est-à-dire $x + y > 5$. De même, comme 3 et 2 sont positifs, $x \times y > 3 \times 2$ c'est-à-dire $xy > 6$.
2. En revanche, il est faux de dire que $x - y > 3 - 2$ c'est-à-dire que $x - y \geqslant 1$. En effet, si $x = 4$ et $y = 3{,}5$ alors $x > 3$ et $y > 2$ mais $x - y = 0{,}5 < 1$.
   De même, il est faux de dire que $\frac{x}{y} > \frac{3}{2}$. Par exemple, si $x = 11$ et $y = 10$ alors $x > 3$ et $y > 2$ mais $\frac{x}{y} = \frac{11}{10} = 1{,}1 < 1{,}5 = \frac{3}{2}$.

Remarque 12. Comme précédemment, lorsque l'opération est possible, on peut la faire directement sur une double inégalité. Par exemple, si x et y sont deux réels tels que $1 < x \leqslant 5$ et $3 < y \leqslant 4$ alors, comme tous les nombres sont positifs, $1 \times 3 < x \times y \leqslant 5 \times 4$ c'est-à-sire $3 < xy \leqslant 20$.

Remarque 13. Les opérations précédentes peuvent se faire si les inégalités sont dans le même sens même si l'une est stricte et l'autre large. L'inégalité obtenue est une inégalité stricte (et donc aussi une inégalité large) sauf dans certains cas de multiplication par 0.

IV. — Encadrement et valeurs approchées

Définition 14

Soit a, b et x des réels. Si $a \leqslant x \leqslant b$, on dit que a et b encadrent x et la double inégalité $a \leqslant x \leqslant b$ est appelé un encadrement de x.

Le réel $b - a$ est alors appelé l'amplitude de l'encadrement.

Exemple 15.

1. $2 \leqslant \frac{7}{3} \leqslant 3$ est un encadrement de $\frac{7}{3}$ d'amplitude 1.
2. $3{,}12 \leqslant \pi \leqslant 3{,}15$ est un encadrement de π d'amplitude 0,03.
3. $-1{,}415 \leqslant -\sqrt{2} \leqslant -1{,}414$ est un encadrement de $-\sqrt{2}$ d'amplitude 10^{-3}.

Remarque 16. Dire que deux réels a et b encadrent un réel x équivaut à dire que $x \in [a\,;b]$. On dit également que le réel $b - a$ est l'amplitude de l'intervalle $[a\,;b]$.

Définition 17

Soit x un réel et n un entier naturel. On suppose que a et b sont deux nombres décimaux ayant au maximum n chiffres après la virgule, que a et b encadrent x et que $b - a = 10^{-n}$.

On dit alors que

1. a est une valeur approchée par défaut à 10^{-n} près de x.
2. b est une valeur approchée par défaut à 10^{-n} près de x.

Exemple 18.

1. L'encadrement $1{,}414 \leqslant \sqrt{2} \leqslant 1{,}415$ montre que 1,414 est une valeur approchée par défaut à 10^{-3} près $\sqrt{2}$ et 1,415 est une valeur approchée par excès à 10^{-3} près $\sqrt{2}$.
2. L'encadrement $3{,}12 \leqslant \pi \leqslant 3{,}15$ ne permet pas de déterminer une valeur approchée de π à 10^{-2} près car l'amplitude est supérieure à 10^{-2}.
3. Si x est un réel tel que $1{,}4999 \leqslant x \leqslant 1{,}5$, on peut en déduire que $1{,}4999 \leqslant x \leqslant 1{,}5000$ donc 1,4999 est une valeur approchée par défaut à 10^{-4} près de x et 1,5 est une valeur approchée par excès à 10^{-4} près de x.

Remarque 19. Si x est un réel positif dont on connaît le début du développement décimal, on peut obtenir une valeur approchée par défaut par troncature et une valeur approchée par excès en ajoutant 1 au dernier chiffre de la troncature.

Exemple 20. Le développement décimale de π est $\pi = 3{,}141592654...$ donc une valeur approchée par défaut à 10^{-6} près de π est 3,141592 (on a tronqué après la sixième décimale) et une valeur approchée par excès à 10^{-6} près de π est 3,141593 (on a ajouté 1 à la dernière décimale de la troncature).

Définition 21

Soit x un réel, n un entier naturel et a et b les valeurs approchées par défaut et par excès à 10^{-n} près de x définies dans la définition 17.

La valeur arrondie de x à 10^{-n} près est celui des deux nombres a ou b qui est le plus proche de x.

Si x est à égale distance de a et b, on convient que la valeur arrondie de x est b.

Exemple 22.

1. La valeur arrondie de $\sqrt{2}$ à 10^{-2} près est 1,41 car $1{,}41 \leqslant \sqrt{2} \leqslant 1{,}415$.
2. La valeur arrondie de $-\frac{2}{3}$ à 10^{-4} près est $-0{,}6667$ car $-0{,}6667 \leqslant -\frac{2}{3} \leqslant -0{,}66665$.
3. La valeur arrondie de 1,4375 à 10^{-3} près est 1,438.

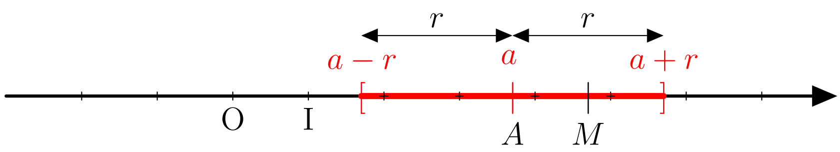
Propriété 23

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $r > 0$.

L'intervalle $[a - r\,; a + r]$ est l'ensemble des réels x tels que $|x - a| \leqslant r$.

De même, l'intervalle $]a - r\,; a + r[$ est l'ensemble des réels x tels que $|x - a| < r$.

Démonstration. Soit x un nombre réel. On note A le point d'abscisse a sur la droite réelle et M le point d'abscisse x.



Alors, x appartient à $[a - r\,; a + r]$ si et seulement si $AM \leqslant r$. Or, d'après la propriété 7 du chapitre 1, $AM = |x_M - x_A| = |x - a|$ donc $x \in [a - r\,; a + r]$ si et seulement si $|x - a| \leqslant r$.

La démonstration est identique pour $]a - r\,; a + r[$ en remplaçant $\leqslant$ par $<$. $\square$

Remarque 24. Les deux intervalles $]a - r\,; a + r[$ et $[a - r\,; a + r]$ de la propriété précédente sont symétriques par rapport à a : on dit qu'ils sont centrés en a.

Exemple 25. On a $\pi \in [3{,}141\,; 3{,}142]$ donc $\pi \in [3{,}1415 - 0{,}0005\,; 3{,}1415 + 0{,}0005]$ et ainsi $|\pi - 3{,}1415| \leqslant 0{,}0005$.