⧫ Chapitre 4. — Résolution d'équations

I. — Définitions

Définition 1

Une équation est une égalité dans laquelle figure une (ou plusieurs) quantité(s) inconnue(s) traditionnellement notées x (y, z, t, X,...).

Dans la suite, on ne considère que des équations ayant une seule inconnue.

Définition 2

On dit qu'un nombre réel est solution d'une équation si, lorsqu'on remplace l'inconnue par ce nombre dans l'équation, on obtient une égalité vraie.

Exemple 3. Par exemple, -1 est solution de $x^2 + 3x = -2$ car l'égalité $(-1)^2 + 3 \times (-1) = -2$ est vraie. En revanche, 1 n'est pas solution de cette équation car l'égalité $1^2 + 3 \times 1 = -2$ est fausse puisque $1^2 + 3 \times 1 = 4$.

Définition 4

Résoudre une équation dans $\mathbb{R}$, c'est déterminer l'ensemble de toutes ses solutions.

Remarque 5. Il se peut qu'une équation n'ait pas de solution dans $\mathbb{R}$. C'est le cas par exemple de l'équation $x^2 = -1$ car, pour tout réel x, $x^2 \geqslant 0$. Dans ce cas, l'ensemble des solutions est vide. On note cet ensemble $\varnothing$.

Définition 6

On dit que deux équations sont équivalentes si elles ont le même ensemble de solutions. Lorsque deux équations (E) et (F) sont équivalentes, on note :

$$(E) \Leftrightarrow (F)$$

Propriété 7. — (admise)

Étant donné une équation (E), on obtient une équation équivalente à (E) si :

1. on ajoute ou on soustrait un même nombre réel aux deux membres de l'équation ;

2. on multiplie ou on divise les deux membres de l'équation par une même nombre <u>non nul</u>.

Méthode 8

Pour résoudre une équation, on utilise les deux propriétés précédentes pour « isoler » progressivement l'inconnue tout en ne considérant que des équations équivalentes.

Exemple 9. Considérons l'équation (E_1) : $\dfrac{x+3}{5} = 2 - x$ d'inconnue x. On a alors :

$$\begin{aligned}
(E) &\Leftrightarrow \left(\frac{x+3}{5}\right) \times 5 = (2-x) \times 5 && \text{(on multiplie les deux membres par } 5 \neq 0\text{)}\\
&\Leftrightarrow x + 3 = 10 - 5x &&\\
&\Leftrightarrow x + 3 + 5x = 10 - 5x + 5x && \text{(on ajoute } 5x \text{ aux deux membres)}\\
&\Leftrightarrow 6x + 3 = 10 &&\\
&\Leftrightarrow 6x + 3 - 3 = 10 - 3 && \text{(on soustrait 3 aux deux membres)}\\
&\Leftrightarrow 6x = 7 &&\\
&\Leftrightarrow \frac{6x}{6} = \frac{7}{6} && \text{(on divise les deux membres par } 6 \neq 0\text{)}\\
&\Leftrightarrow x = \frac{7}{6} &&
\end{aligned}$$

On conclut que l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de (E) est $\left\{\frac{7}{6}\right\}$.

Propriété 10. — Cas particulier important des équations affines

Si a et b sont deux réels tels que $a \neq 0$ alors

$$ax + b = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}.$$

Exemple 11. L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation (E_2) : $6X - 3 = 0$ d'inconnue X est $\left\{\frac{1}{2}\right\}$ car ici $a = 6$ et $b = -3$ donc $-\frac{b}{a} = -\frac{-3}{6} = \frac{1}{2}$.

II. — Équation produit

Propriété 12. — Règle du produit nul (admise)

Un produit de deux nombres réels est nul si et seulement si l'un au moins des deux facteurs du produit est nul.

En conséquence, si $A(x)$ et $B(x)$ sont deux quantités dépendant d'une inconnue x alors

$$A(x)B(x) = 0 \Leftrightarrow A(x) = 0 \text{ ou } B(x) = 0.$$

Remarque 13. Cette règle reste vraie pour une produit de 3, 4, 5,... (ou autant que vous voudrez de) facteurs.

Exemple 14. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E_3) : $(3x-6)(7x+2) = 0$.

On a

$$(E_3) \Leftrightarrow 3x - 6 = 0 \text{ ou } 7x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ou } x = -\frac{2}{7}.$$

L'ensemble des solutions de (E_3) est $\left\{2; -\frac{2}{7}\right\}$.

Méthode 15

Une manière de se ramener à un produit nul est d'essayer de factoriser soit en utilisant les identités remarquables soit en reconnaissant un facteur commun.

Exemple 16.

1. On considère l'équation $(E_3) : (3t+5)^2 = 4$ d'inconnue t. Alors,

$$\begin{aligned}
(F) &\Leftrightarrow (3t+5)^2 - 4 = 4 - 4 && \text{(On soustrait 4 aux deux membres)}\\
&\Leftrightarrow \underbrace{(3t+5)}_{a}{}^2 - \underbrace{2}_{b}{}^2 = 0 && \text{(On reconnait une identité remarquable)}\\
&\Leftrightarrow \left[\underbrace{(3t+5)}_{a} - \underbrace{2}_{b}\right]\left[\underbrace{(3t+5)}_{a} + \underbrace{2}_{b}\right] = 0 && \text{(On factorise } a^2-b^2 \text{ en } (a-b)(a+b)\text{)}\\
&\Leftrightarrow (3t+3)(3t+7) = 0 &&\\
&\Leftrightarrow 3t+3 = 0 \text{ ou } 3t+7 = 0 && \text{(On utilise la règle du produit nul)}\\
&\Leftrightarrow t = -1 \text{ ou } t = -\frac{7}{3} && \text{(Ce sont deux équations affines)}
\end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de (E_3) est $\left\{-1, -\frac{7}{3}\right\}$.

2. On considère l'équation $(E_4) : 3x^2 = 5x$ d'inconnue x. Alors,

$$\begin{aligned}
(E_4) &\Leftrightarrow 3x^2 - 5x = 0 && \text{(On a soustrait } 5x \text{ aux deux membres)}\\
&\Leftrightarrow 3x \times x - 5 \times x = 0 && \text{(On reconnait le facteur commun } x\text{)}\\
&\Leftrightarrow x(3x-5) = 0 && \text{(On factorise pour obtenir un produit nul)}\\
&\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } 3x-5 = 0 && \text{(On utilise la règle du produit nul)}\\
&\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \frac{5}{3} && \text{(On reconnait une équation affine)}
\end{aligned}$$

Finalement, l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de (E_4) est $\left\{0, \frac{5}{3}\right\}$.

III. — Équation quotient

Propriété 17. — Règle du quotient nul (admise)

Un quotient est nul si et seulement si le numérateur est nul et le dénominateur est <u>non nul</u>.

En conséquence, si $A(x)$ te $B(x)$ sont deux quantités dépendant d'une inconnue x alors

$$\frac{A(x)}{B(x)} = 0 \Leftrightarrow A(x) = 0 \text{ et } B(x) \neq 0.$$

Exemple 18.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(E_6) : \frac{5x-3}{x+3} = 0$.

Cette équation a un sens si et seulement si $x+3 \neq 0$ c'est-à-dire $x \neq -3$ et, pour tout $x \neq -3$,

$$(E_6) \Leftrightarrow 5x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{5}.$$

Comme $\frac{3}{5} \neq -3$, l'ensemble des solutions de (E_6) est $\left\{\frac{3}{5}\right\}$.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(E_6) : \frac{x^2-25}{x-5} = 0$.
Cette équation a un sens si et seulement si $x - 5 \neq 0$ c'est-à-dire $x \neq 5$. On a alors, pour tout réel $x \neq 5$,

$$(E_6) \Leftrightarrow x^2 - 25 = 0 \Leftrightarrow (x-5)(x+5) \Leftrightarrow x - 5 = 0 \text{ ou } x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = 5 \text{ ou } x = -5$$

Comme on doit avoir $x \neq 5$, on conclut que l'ensemble des solutions de (E_6) est donc $\{-5\}$.