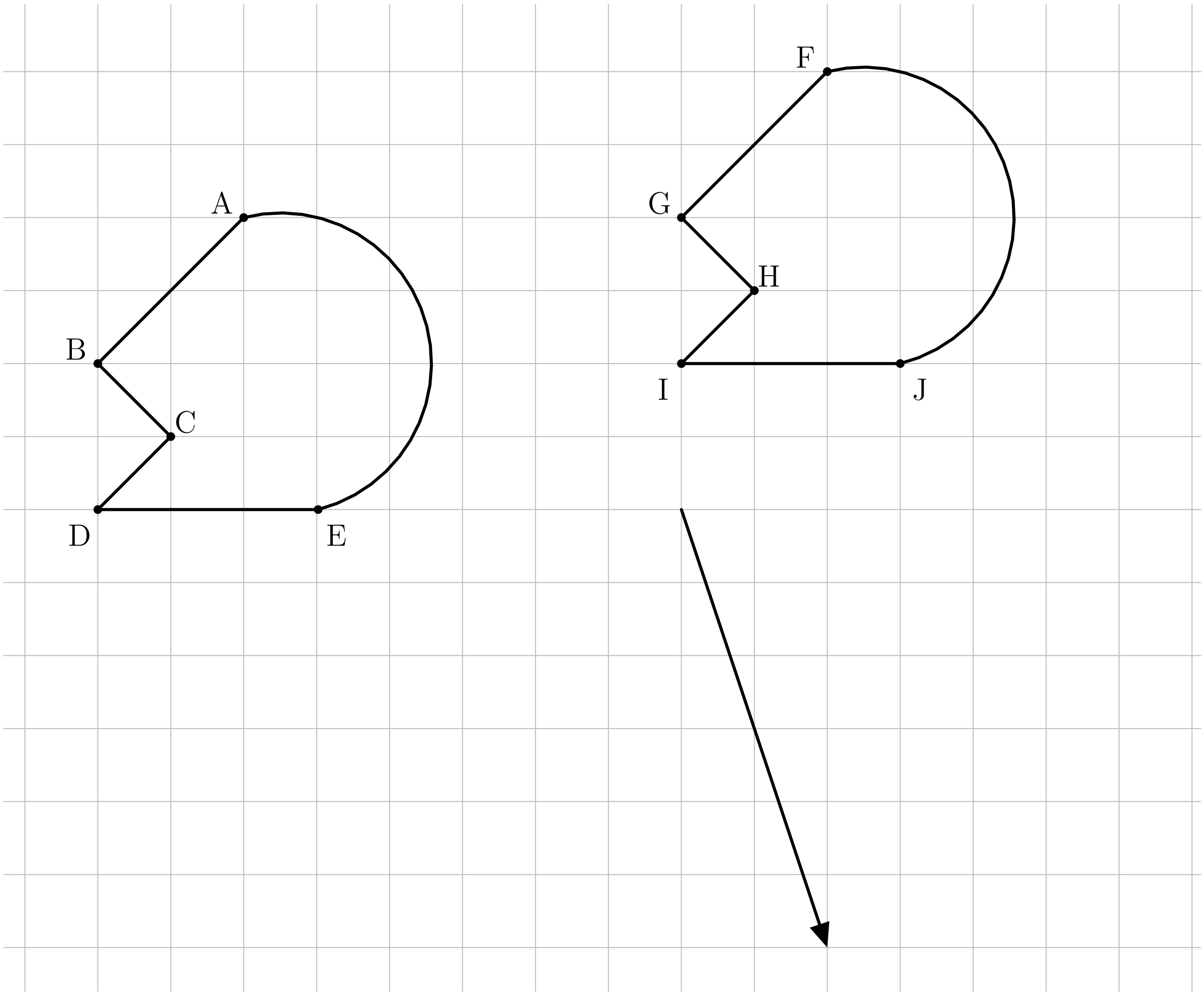
⧫ Chapitre 3. — Les vecteurs du plan

I. — Définition



La figure FGHIJ est obtenue à partir de la figure ABCDE par un déplacement qu'on peut voir comme un glissement. Ce glissement peut se symboliser par une flèche de A à F (par exemple). Alors, tous les points sont déplacés selon la même flèche. Ainsi, par cette transformation, le point B devient le point G, le point C devient le point H, etc...

Ce déplacement ou cette flèche sont entièrement déterminés par 3 paramètres : la direction, le sens et la longueur.

Définition 1

Soit A et B deux points distincts du plan. On définit le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ par :

- sa direction qui est donnée par la droite (AB) (ou n'importe quelle parallèle à (AB)) ;
- son sens qui est le sens de A vers B ;
- sa norme qui est la longueur AB et que l'on note $\left\|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right\|$.

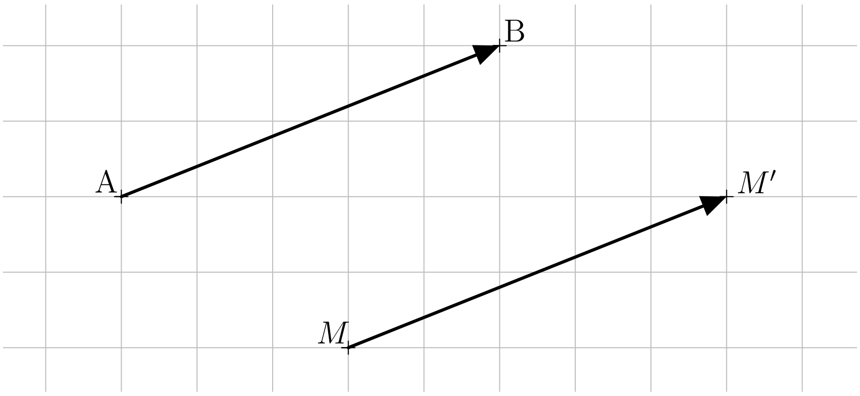
On dit alors que A est l'origine du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et B est l'extrémité du $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$.

Géométriquement, le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ se représente par une flèche de A vers B.

Remarque 2. Si A, B, C et D sont quatre points distincts alors les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ sont égaux si et seulement si ils ont même direction, même sens et même norme c'est-à-dire si et seulement si (AB) est parallèle à (CD), le sens de A vers B est le même que le sens de C vers D et AB = CD.

Définition 3

Soit A et B deux points distincts du plan. La translation de vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ est la transformation du plan qui à tout point M associe le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$.



Il découle des définitions précédentes la propriété suivantes.

Propriété 4

Soit A, B, C et D quatre points distincts du plan. Le trois affirmations suivantes sont équivalentes :

- $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{CD}}$;
- le quadrilatère ABDC est un parallélogramme (éventuellement aplati) ;
- le point D est l'image du point C par la translation de vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$.

Définition 5

Si A, B, C et D sont quatre points distincts du plan tel que $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{CD}}$, on dit que $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ sont des représentants d'un même vecteur que l'on peut noter avec une seule lettre, par exemple $\vec{u}$ (ou $\vec{v}$, $\vec{w}$,...)

Remarque 6. Dans tout ce qui précède, on a défini des vecteurs du type $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ où A et B sont deux points distincts. Ce vecteur correspond à la translation qui envoie le point A sur le point B.

On peut également définir le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AA}}$ qui correspond à une translation qui laisse les points fixes : l'image du point A est le point A lui-même. Dans ce cas, on dit que $\overrightarrow{\mathrm{AA}}$ est le vecteur nul, que l'on note $\overrightarrow{0}$.

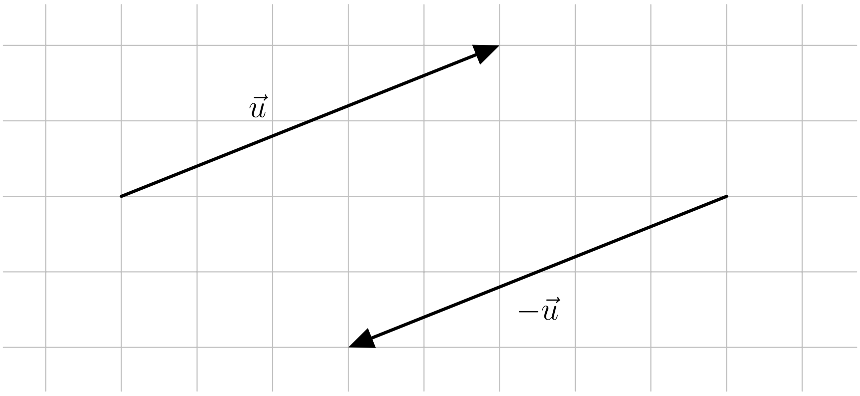
Ce vecteur est particulier car il n'a ni direction ni sens. En revanche, il a une norme égale à 0.

Définition 7

Soit $\vec{u}$ un vecteur. On définit le vecteur opposé de $\vec{u}$, noté $-\vec{u}$, de la manière suivante :

1. si $\vec{u} = \vec{0}$ alors $-\vec{u} = \vec{0}$;

2. si $\vec{u} \neq \vec{0}$ alors $-\vec{u}$ est le vecteur ayant la même direction et la même norme que $\vec{u}$ mais ayant le sens contraire.



Remarque 8. Si A et B sont deux points (éventuellement confondus) alors $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

II. — Opérations sur les vecteurs

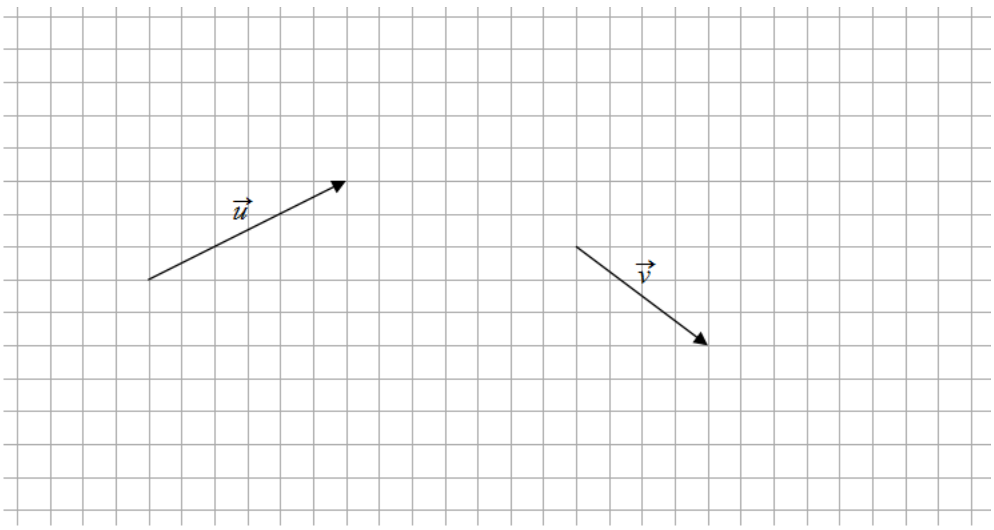
1) Addition et soustraction

Définition 9

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. On définit :

- la somme de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ comme le vecteur associé à la translation obtenue par l'enchaînement de la translation de vecteur $\vec{u}$ suivie de la translation de vecteur $\vec{v}$. On note ce vecteur $\vec{u} + \vec{v}$.
- la différence de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ comme le vecteur $\vec{u} + (-\vec{v})$. On note ce vecteur $\vec{u} - \vec{v}$.

Exemple 10. Sur la figure ci-dessous, construire les vecteurs $\vec{u} + \vec{v}$ et $\vec{u} - \vec{v}$ en partant d'un point quelconque.

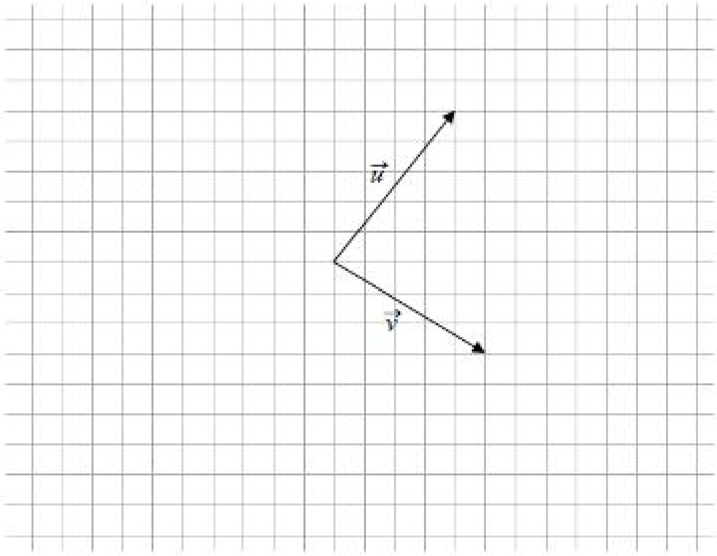


Remarque 11. Pour tout vecteur $\vec{u}$ du plan, $\vec{u}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{u}=\vec{u}$ et $\vec{u}-\vec{u}=\vec{0}$.

Propriété 12. — (admise)

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan,

1) $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$ 2) $\vec{u}-\vec{v}=-(\vec{v}-\vec{u})$ 3) $-\vec{u}+\vec{v}=-(\vec{u}-\vec{v})$ 4) $-\vec{u}-\vec{v}=-(\vec{u}+\vec{v})$



Remarque 13. Si $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont trois vecteurs, on peut définir le vecteur $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$ comme le vecteur $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}$. On peut démontrer qu'il est égal à $\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$.

Il découle immédiatement de la définition de l'addition de vecteurs la propriété suivante.

Propriété 14. — Relation de Chasles

Soit A, B et C trois points du plan. Alors,

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}.$$

Remarque 15. On retrouve en particulier que $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$ et donc $\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$.

Exercice 16. Soit A, B, C et D quatre points du plan. Démontrer que $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$.

Solution. — On écrit, grâce à la relation de Chasles, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}$ donc

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}&=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CD}\\&=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DB}\\&=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}\end{aligned}$$

Ainsi, on a bien montré que $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$.

Remarque 17. ATTENTION ! Si A, B et C sont quatre points du plan, $-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\neq-\overrightarrow{AC}$ car, dans le membre de gauche, le signe $-$ porte seulement si le vecteur $\overrightarrow{AB}$.

En revanche, $-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}=-(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})=-\overrightarrow{AC}$.

Propriété 18. — Règle du parallélogramme

Soit A, B, C et D quatre points distincts du plan. Alors, ABCD est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.

Démonstration. Supposons que ABCD est un parallélogramme. Alors, d'après la propriété 4, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Dès lors, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$ et donc, grâce à la relation de Chasles, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.

Réciproquement, supposons que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$. Alors, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DA}$ donc, d'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC}$ c'est-à-dire $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ donc, d'après la propriété 4, ABCD est un parallélogramme. □

2) Multiplication par un réel

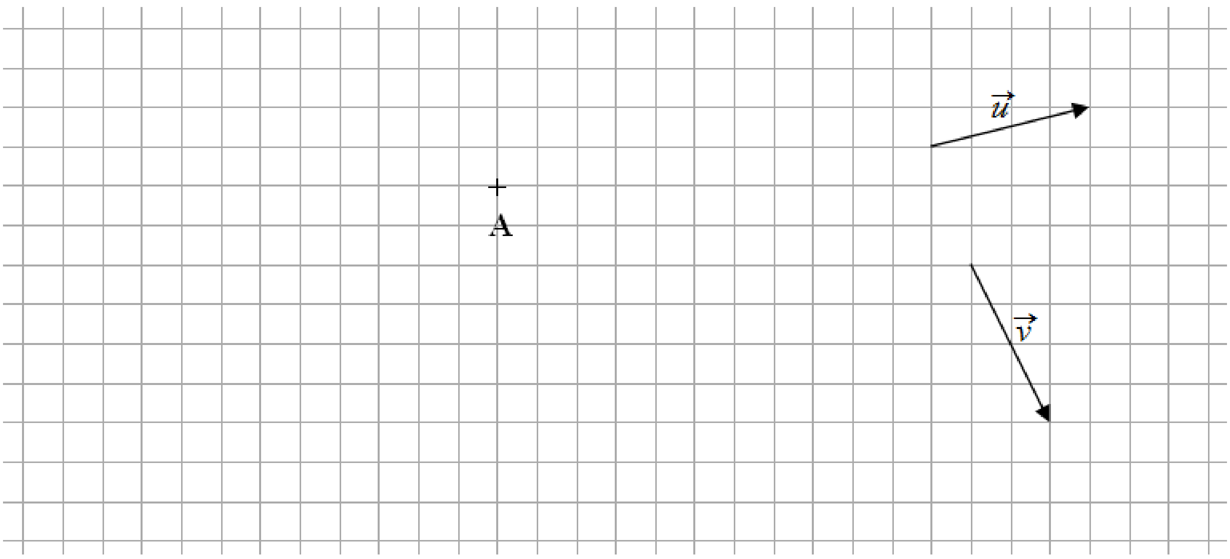
Définition 19

Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan et k un nombre réel. On définit le vecteur $k\vec{u}$ de la manière suivante :

1. si $k = 0$ ou $\vec{u} = \overrightarrow{0}$ alors $k\vec{u} = \overrightarrow{0}$;

2. si $k \neq 0$ et $\vec{u} \neq \overrightarrow{0}$ alors $k\vec{u}$ est le vecteur qui a
- la même direction que $\vec{u}$;
- le même sens que $\vec{u}$ si $k > 0$ et le sens contraire si $k < 0$;
- un norme égale à $|k| \times \|u\|$ (autrement dit, $\|k\vec{u}\| = |k| \times \|\vec{u}\|$).

Exemple 20. Représenter sur la figure ci-dessous les vecteurs $-3\vec{u}$, $2\vec{v}$, $1{,}5\vec{u}$ et $-\frac{1}{2}\vec{v}$ en prenant, à chaque fois, le point A comme origine.



Remarque 21. Si $\vec{u}$ est un vecteur du plan alors il découle des définitions 7 et 19 que $(-1)\vec{u} = -\vec{u}$.

Propriété 22. — (Admise)

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et tous réels k et ℓ,

1. $k(\vec{u}+\vec{v}) = k\vec{u}+k\vec{v}$;
2. $(k+\ell)\vec{u} = k\vec{u}+\ell\vec{v}$;
3. $k(\ell\vec{u}) = (k\ell)\vec{u} = \ell(k\vec{u})$;
4. $k\vec{u} = \overrightarrow{0}$ si et seulement si $k=0$ ou $\vec{u} = \overrightarrow{0}$.

Exemple 23. Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. Simplifier l'écriture du vecteur $\vec{w}$ défini par

$$\vec{w} = \frac{3}{2}(\vec{u}+2\vec{v}) - 0{,}5\vec{u} - \vec{v}.$$

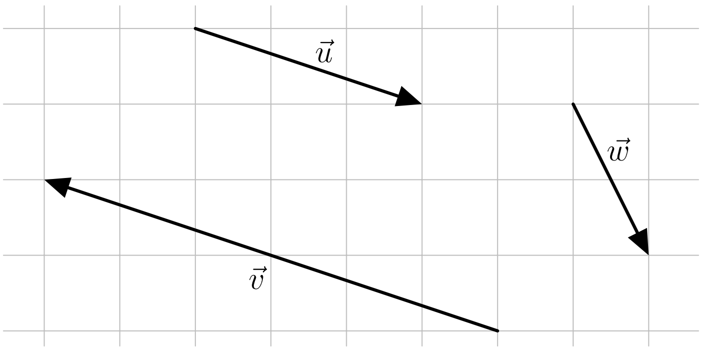
Réponse : $\vec{w} = \frac{3}{2}\vec{u} + (\frac{3}{2}\times 2)\vec{v} - \frac{1}{2}\vec{u} - \vec{v} = (\frac{3}{2}-\frac{1}{2})\vec{u} + 3\vec{v} - \vec{v} = \vec{u}+2\vec{v}$.

III. — Colinéarité et alignement

Définition 24

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. On dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si $\vec{u} = \overrightarrow{0}$ ou s'il existe un réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$.

Exemple 25.



Sur la figure ci-dessus, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires car $\vec{v} = -2\vec{u}$. En revanche, $\vec{u}$ et $\vec{w}$ ne sont pas colinéaires car ils n'ont pas la même direction donc il n'existe pas de réel k tel que $\vec{w} = k\vec{u}$.

Propriété 26

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan. Alors, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement s'ils ont la même direction.

Démonstration. Supposons que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires. Comme $\vec{u}$ n'est pas nul, il existe un réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$ et donc, par définition, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont la même direction.

Réciproquement, supposons que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont la même direction. Posons $k = \frac{\|\vec{v}\|}{\|\vec{u}\|}$ si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont le même sens et $k = -\frac{\|\vec{v}\|}{\|\vec{u}\|}$ si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de sens contraire. Alors, par définition, $\vec{v} = k\vec{u}$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires. $\square$

Théorème 27

Soit A, B, C et D quatre points distincts du plan.

1. Les points A, B et C sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.
2. Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Démonstration.

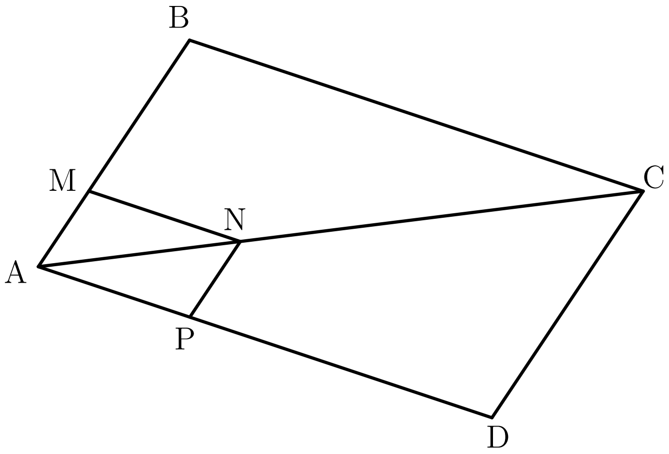
1. Les points A, B et C sont alignés si et seulement si les droites (AB) et (AC) sont confondues ce qui revient à dire que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ont la même direction. Or, d'après la propriété 26, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ont la même direction si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires. On conclut donc que A, B et C sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.
2. La démonstration est la même en remarquant que (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont la même direction.

□

Exercice 28. Soit ABCD un parallélogramme. On considère les points M et P tels que $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$ et le point N tel que AMNP soit un parallélogramme.

Montrer que les points A, N et C sont alignés.

Solution. — Commençons par faire une figure :



Comme AMNP est un parallélogramme, d'après la règle du parallélogramme, $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AP}$. Or, par hypothèse, $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$ donc

$$\overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}).$$

Comme ABCD est un parallélogramme, d'après la règle du parallélogramme, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$. Finalement, on aboutit à $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AN}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires ce qui prouve que A, N et C sont alignés.

Propriété 29

Soit A, B et I trois points distincts du plan. Alors, les affirmations suivantes sont équivalentes :

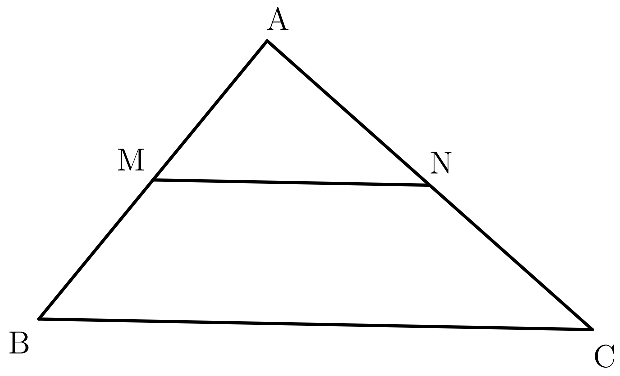
1. I est le milieu de [AB] ;
2. $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$;
3. $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Démonstration. Le point I est le milieu de [AB] si et seulement si les points A, I et B sont alignés dans cet ordre et AI = IB ce qui revient à dire que les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{IB}$ ont même direction, même sens et même norme ce qui équivaut à dire que $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$.

De plus, $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$ équivaut à $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB}$ ce qui équivaut à $\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{IA} = \overrightarrow{AB}$ c'est-à-dire $2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB}$ soit encore $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. □

Exercice 30. Soit ABC un triangle quelconque. On note M le milieu de [AB] et N le milieu de [AC]. Démontrer que (MN) est parallèle à (BC) (théorème de la droite des milieux).

Solution. — Commençons par faire une figure.



Comme M est le milieu de [AB], $\overrightarrow{MA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$ et, comme N est le milieu de [AC], $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. Ainsi, à l'aide de la relation de Chasles,

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}.$$

Ainsi, $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires ce qui montre que (MN) et (BC) sont parallèles.

Remarque 31. Le théorème de la droite des milieux est un cas particulier du théorème de Thalès. Il est facile d'adapter le raisonnement précédent pour obtenir une démonstration du théorème de Thalès.