

◆ Chapitre 2. — Calcul algébrique et équations

I. — Calcul algébrique

1) Développement

Définition 1

Développer une expression signifie transformer un produit en somme.

Méthode 2

Pour développer une expression, on utilise la distributivité si l'expression contient deux facteurs. Si elle contient plus de deux facteurs, on répète autant de fois que nécessaire la distributivité en prenant les facteurs deux par deux.

Exemple 3.

1. Développer $A(x) = 5x(3x - 2)$.

On a

$$A(x) = 5x \times (3x - 2) = 5x \times 3x - 5x \times 2 = 15x^2 - 10x$$

2. Développer $B(x) = (2x - 3)(-x + 4)$.

On a

$$B(x) = (2x - 3)(-x + 4) = 2x \times (-x) + 2x \times 4 - 3 \times (-x) - 3 \times 4 = -2x^2 + 9x - 12$$

Dans le second exemple, on a non seulement développé mais également rassemblé les puissances identiques en une seule et ordonné de la plus grande puissance à la plus petite.

Cette forme s'appelle la forme développée, réduite et ordonnée de $B(x)$.

Propriété 4. — Identités remarquables

Pour tous réels a et b ,

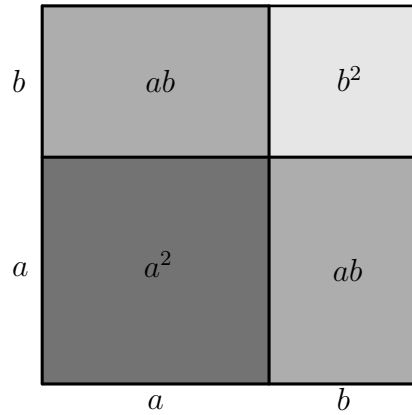
1. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;
2. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$;
3. $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$.

Démonstration. Soit a et b deux réels.

1. $(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
2. $(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$.
3. $(a - b)(a + b) = a^2 + ab - ba - b^2 = a^2 - b^2$.

□

L'égalité $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ peut s'interpréter graphiquement de la manière suivante :



Le grand carré a une aire égale à $(a + b)^2$ et il est composé d'un carré d'aire a^2 , d'un carré d'aire b^2 et de deux rectangles d'aire ab . Ainsi, $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Exemple 5.

1. Développer $A(x) = (3x + 2)^2$.

On a $A(x) = (3x)^2 + 2 \times (3x) \times 2 + 2^2 = 9x^2 + 12x + 4$.

2. Développer $B(x) = (5 - x)^2$.

On a $B(x) = 5^2 - 2 \times 5 \times x + x^2 = x^2 - 10x + 25$.

3. Développer $C(x) = (x - 0,5)(x + 0,5)$.

On a $C(x) = x^2 - 0,5^2 = x^2 - 0,25$.

2) Factorisation

Définition 6

Factoriser une expression signifie transformer une somme en produit.

Méthode 7

Pour développer une expression, on peut utiliser

- un facteur commun ;
- les identités remarquables ;
- combiner les deux méthodes précédentes.

Exemple 8.

1. Factoriser $A(x) = (x + 1)(2x + 3) + (x + 1)(-5x - 2)$.

On reconnaît le facteur commun $x + 1$:

$$\begin{aligned} A(x) &= (x + 1)(2x + 3) + (x + 1)(-5x - 2) \\ &= (x + 1)[(2x + 3) + (-5x - 2)] \\ &= (x + 1)[2x + 3 - 5x - 2] \\ &= (x + 1)(-3x + 1) \end{aligned}$$

2. Factoriser $B(x) = x^2 + 6x + 9$.

On reconnaît une identité remarquable :

$$B(x) = x^2 + 2 \times 3 \times x + 3^2 = (x + 3)^2$$

3. Factoriser $B(x) = 16 - 9x^2$.

On reconnaît une identité remarquable :

$$C(x) = 4^2 - (3x)^2 = (2 - 3x)(2 + 3x).$$

4. Factoriser $D(x) = x^2 - 1 - (x - 1)(2 - 7x)$.

On reconnaît d'abord une identité remarquable : $x^2 - 1 = x^2 - 1^2 = (x - 1)(x + 1)$. On a donc $D(x) = (x - 1)(x + 1) - (x - 1)(2 - 7x)$. De la sorte, on fait apparaître un facteur commun :

$$\begin{aligned} D(x) &= (x - 1)(x + 1) - (x - 1)(2 - 7x) \\ &= (x - 1)[(x + 1) - (2 - 7x)] \\ &= (x - 1)(x + 1 - 2 + 7x) \\ &= (x - 1)(8x - 1) \end{aligned}$$

3) Réduction au même dénominateur

Méthode 9

Pour additionner deux expressions de la forme $\frac{A(x)}{B(x)}$ et $\frac{C(x)}{D(x)}$, il faut les réduire au même dénominateur.

Exemple 10.

1. Calculer $A(x) = \frac{3x+1}{x-1} - \frac{x+3}{x-5}$.

Ici, on obtient un dénominateur commun en multipliant numérateur et dénominateur de chaque fraction par le dénominateur de l'autre fraction :

$$\begin{aligned} A(x) &= \frac{(3x+1)(x-5)}{(x-1)(x-5)} - \frac{(x+3)(x-1)}{(x-5)(x-1)} \\ &= \frac{3x^2 - 15x + x - 5 - (x^2 - x + 3x - 3)}{(x-1)(x-5)} \\ &= \frac{3x^2 - 14x - 5 - x^2 - 2x + 3}{x^2 - 5x - x + 5} \end{aligned}$$

$$\text{i.e. } A(x) = \frac{2x^2 - 16x - 2}{x^2 - 6x + 5}.$$

2. Calculer $B(x) = \frac{7x-3}{x} + \frac{2x-1}{x^3}$.

Ici, on obtient un dénominateur commun en multipliant numérateur et dénominateur de la première fraction par x^2 :

$$\begin{aligned} B(x) &= \frac{(7x-3) \times x^2}{x \times x^2} + \frac{2x-1}{x^3} \\ &= \frac{7x^3 - 3x^2 + (2x-1)}{x^3} \end{aligned}$$

$$\text{i.e. } B(x) = \frac{7x^3 - 3x^2 + 2x - 1}{x^3}.$$

II. — Puissances entières et racines carrées

1) Puissances entières

Définition 11

Soit a un réel et n un entier relatif.

1. Si $n > 0$ alors $a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ fois}}$.
2. $a^0 = 1$.
3. Si $n < 0$ et $a \neq 0$ alors $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$.

Exemple 12.

1. $3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$.
2. $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} = 0,125$.

Propriété 13

Pour tout réel a non nul et tous entiers relatifs n et m :

$$1) a^m \times a^n = a^{m+n} \quad 2) \frac{1}{a^n} = a^{-n} \quad 3) \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad 4) (a^m)^n = a^{m \times n}.$$

Propriété 14

Pour tous réels a et b non nuls et pour tout entier relatif n ,

$$1) a^n \times b^n = (a \times b)^n \quad 2) \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n \quad 3) 1^n = 1.$$

Exemple 15.

1. $a = \frac{5^2 \times 10^2}{5^3 \times 2^4} = \frac{5^2 \times (2 \times 5)^2}{5^3 \times 2^4} = \frac{5^2 \times 2^2 \times 5^2}{5^3 \times 2^4} = \frac{2^2 \times 5^4}{5^3 \times 2^4} = \frac{5}{2^2} = \frac{5}{4}$.
2. $b = 10^{-3} \times 10^5 \times 0,0001 = 10^{-3+5} \times 10^{-4} = 10^2 \times 10^{-4} = 10^{2-4} = 10^{-2} = 0,01$.
3. $c = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times 4^{-2} = \frac{1^2}{2^2} \times \frac{1}{4^2} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{16} = \frac{1}{64}$.
4. $d = (0,2)^2 \times (0,4)^3 \times 10^4 = (2 \times 10^{-1})^2 \times (4 \times 10^{-1})^3 \times 10^4 = 2^2 \times 10^{-2} \times 4^3 \times 10^{-3} \times 10^4$
donc $d = 4 \times 64 \times 10^{-2-3+4} = 256 \times 10^{-1} = 25,6$.

Exercice 16. On considère deux réels a et b non nuls. Ecrire chacun des nombres suivants sous la forme $a^m b^n$ où m et n sont des entiers relatifs.

$$(a^2 b)^{-3} \times (ab)^2 \quad (ab^2)^{-1} \times (a^2 b)^2 \quad \frac{a^{-1} b^2}{a^{-2} b}.$$

Solution. — $(a^2 b)^{-3} \times (ab)^2 = (a^2)^{-3} \times b^{-3} \times a^2 \times b^2 = a^{-6} a^2 b^{-3} b^2 = a^{-4} b^{-1}$
 $(ab^2)^{-1} \times (a^2 b)^2 = a^{-1} (b^2)^{-1} \times (a^2)^2 b^2 = a^{-1} b^{-2} a^4 b^2 = a^{-1+4} b^{-2+2} = a^3 b^0$
 $\frac{a^{-1} b^2}{a^{-2} b} = a^{-1} b^2 \times \frac{1}{a^{-2}} \times \frac{1}{b} = a^{-1} b^2 a^2 b^{-1} = a^{-1+2} b^{2-1} = a^1 b^1$.

2) Racines carrées

Définition 17

Soit a un réel positif ou nul. L'unique réel positif ou nul r tel que $r^2 = a$ est appelé la racine carrée de a et on le note $\sqrt{a}$.

Exemple 18.

1. $\sqrt{9} = 3$ car 3 est positif et $3^2 = 9$.
2. $\sqrt{0,25} = 0,5$ car 0,5 est positif et $0,5^2 = 0,25$.
3. $\sqrt{0} = 0$ car 0 est positif ou nul et $0^2 = 0$.

Propriété 19

Soit a et b deux réels.

1. $\sqrt{a^2} = |a|$.
2. Si a et b sont positifs, $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$.
3. Si $a \geq 0$ et $b > 0$, $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

Démonstration.

1. Si $a \geq 0$ alors $|a|^2 = a^2$ et si $a < 0$ alors $|a|^2 = (-a)^2 = a^2$. Ainsi, $|a|$ est un nombre positif tel que $|a|^2 = a^2$ donc, par définition, $\sqrt{a^2} = |a|$.
2. Comme $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$ sont positifs, $\sqrt{a}\sqrt{b}$ est positif. De plus, $(\sqrt{a}\sqrt{b})^2 = \sqrt{a}^2 \sqrt{b}^2 = ab$ donc, par définition, $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$.
3. Comme $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$ sont positifs, $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ est positif. De plus, $(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}})^2 = \frac{\sqrt{a}^2}{\sqrt{b}^2} = \frac{a}{b}$ donc, par définition, $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

□

III. — Résolution d'équation

Définition 20

Une équation est une égalité dans laquelle figure une (ou plusieurs) quantité(s) inconnue(s) traditionnellement notées x (y , z , t , X ,...).

Dans la suite, on ne considère que des équations ayant une seule inconnue.

Définition 21

On dit qu'un nombre réel est solution d'une équation si, lorsqu'on remplace l'inconnue par ce nombre dans l'équation, on obtient une égalité vraie.

Exemple 22. Par exemple, -1 est solution de $x^2 + 3x = -2$ car l'égalité $(-1)^2 + 3 \times (-1) = -2$ est vraie. En revanche, 1 n'est pas solution de cette équation car l'égalité $1^2 + 3 \times 1 = -2$ est fausse puisque $1^2 + 3 \times 1 = 4$.

Définition 23

Résoudre une équation dans $\mathbb{R}$, c'est déterminer l'ensemble de toutes ses solutions.

Remarque 24. Il se peut qu'une équation n'ait pas de solution dans $\mathbb{R}$. C'est le cas par exemple de l'équation $x^2 = -1$ car, pour tout réel x , $x^2 \geq 0$. Dans ce cas, l'ensemble des solutions est vide. On note cet ensemble $\emptyset$.

Définition 25

On dit que deux équations sont équivalentes si elles ont le même ensemble de solutions. Lorsque deux équations (E) et (F) sont équivalentes, on note :

$$(E) \Leftrightarrow (F)$$

Propriété 26. — (admise)

Étant donné une équation (E) , on obtient une équation équivalente à (E) si :

1. on ajoute ou on soustrait un même nombre réel aux deux membres de l'équation ;
2. on multiplie ou on divise les deux membres de l'équation par une même nombre non nul.

Méthode 27

Pour résoudre une équation, on utilise les deux propriétés précédentes pour « isoler » progressivement l'inconnue tout en ne considérant que des équations équivalentes.

Exemple 28. Considérons l'équation $(E_1) : \frac{x+3}{5} = 2-x$ d'inconnue x . On a alors :

$$\begin{aligned}(E) &\Leftrightarrow \left(\frac{x+3}{5}\right) \times 5 = (2-x) \times 5 && \text{(on multiplie les deux membres par } 5 \neq 0\text{)} \\ &\Leftrightarrow x+3 = 10-5x \\ &\Leftrightarrow x+3 + 5x = 10-5x + 5x && \text{(on ajoute } 5x \text{ aux deux membres)} \\ &\Leftrightarrow 6x+3 = 10 \\ &\Leftrightarrow 6x+3 - 3 = 10 - 3 && \text{(on soustrait } 3 \text{ aux deux membres)} \\ &\Leftrightarrow 6x = 7 \\ &\Leftrightarrow \frac{6x}{6} = \frac{7}{6} && \text{(on divise les deux membres par } 6 \neq 0\text{)} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{7}{6}\end{aligned}$$

On conclut que l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de (E) est $\left\{\frac{7}{6}\right\}$.

Propriété 29. — Cas particulier important des équations affines

Si a et b sont deux réels tels que $a \neq 0$ alors

$$ax + b = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}.$$

Exemple 30. L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $(E_2) : 6X - 3 = 0$ d'inconnue X est $\left\{\frac{1}{2}\right\}$ car ici $a = 6$ et $b = -3$ donc $-\frac{b}{a} = -\frac{-3}{6} = \frac{1}{2}$.

Propriété 31. — Règle du produit nul (admise)

Un produit de deux nombres réels est nul si et seulement si l'un au moins des deux facteurs du produit est nul.

En conséquence, si $A(x)$ et $B(x)$ sont deux quantités dépendant d'une inconnue x alors

$$A(x)B(x) = 0 \Leftrightarrow A(x) = 0 \text{ ou } B(x) = 0.$$

Remarque 32. Cette règle reste vraie pour une produit de 3, 4, 5,... (ou autant que vous voudrez de) facteurs.

Exemple 33. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(E_3) : (3x - 6)(7x + 2) = 0$.

On a

$$(E_3) \Leftrightarrow 3x - 6 = 0 \text{ ou } 7x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ou } x = -\frac{2}{7}.$$

L'ensemble des solutions de (E_3) est $\left\{2; -\frac{2}{7}\right\}$.

Méthode 34

Une manière de se ramener à un produit nul est d'essayer de factoriser soit en utilisant les identités remarquables soit en reconnaissant un facteur commun.

Exemple 35.

1. On considère l'équation $(E_3) : (3t + 5)^2 = 4$ d'inconnue t . Alors,

$$\begin{aligned} (F) &\Leftrightarrow (3t + 5)^2 - 4 = 4 - 4 && \text{(On soustrait 4 aux deux membres)} \\ &\Leftrightarrow \underbrace{(3t + 5)^2}_a - \underbrace{2^2}_b = 0 && \text{(On reconnaît une identité remarquable)} \\ &\Leftrightarrow \left[\underbrace{(3t + 5)}_a - \underbrace{2}_b \right] \left[\underbrace{(3t + 5)}_a + \underbrace{2}_b \right] = 0 && \text{(On factorise } a^2 - b^2 \text{ en } (a - b)(a + b)) \\ &\Leftrightarrow (3t + 3)(3t + 7) = 0 \\ &\Leftrightarrow 3t + 3 = 0 \text{ ou } 3t + 7 = 0 && \text{(On utilise la règle du produit nul)} \\ &\Leftrightarrow t = -1 \text{ ou } t = -\frac{7}{3} && \text{(Ce sont deux équations affines)} \end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de (E_3) est $\left\{-1, -\frac{7}{3}\right\}$.

2. On considère l'équation $(E_4) : 3x^2 = 5x$ d'inconnue x . Alors,

$(E_4) \Leftrightarrow 3x^2 - 5x = 0$	(On a soustrait $5x$ aux deux membres)
$\Leftrightarrow 3x \times x - 5 \times x = 0$	(On reconnaît le facteur commun x)
$\Leftrightarrow x(3x - 5) = 0$	(On factorise pour obtenir un produit nul)
$\Leftrightarrow x = 0$ ou $3x - 5 = 0$	(On utilise la règle du produit nul)
$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \frac{5}{3}$	(On reconnaît une équation affine)

Finalement, l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de (E_4) est $\left\{0, \frac{5}{3}\right\}$.

Propriété 36. — Règle du quotient nul (admise)

Un quotient est nul si et seulement si le numérateur est nul et le dénominateur est non nul.
En conséquence, si $A(x)$ et $B(x)$ sont deux quantités dépendant d'une inconnue x alors

$$\frac{A(x)}{B(x)} = 0 \Leftrightarrow A(x) = 0 \text{ et } B(x) \neq 0.$$

Exemple 37.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(E_6) : \frac{5x-3}{x+3} = 0$.

Cette équation a un sens si et seulement si $x + 3 \neq 0$ c'est-à-dire $x \neq -3$ et, pour tout $x \neq -3$,

$$(E_6) \Leftrightarrow 5x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{5}.$$

Comme $\frac{3}{5} \neq -3$, l'ensemble des solutions de (E_6) est $\left\{\frac{3}{5}\right\}$.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(E_6) : \frac{x^2-25}{x-5} = 0$.

Cette équation a un sens si et seulement si $x - 5 \neq 0$ c'est-à-dire $x \neq 5$. On a alors, pour tout réel $x \neq 5$,

$$(E_6) \Leftrightarrow x^2 - 25 = 0 \Leftrightarrow (x - 5)(x + 5) \Leftrightarrow x - 5 = 0 \text{ ou } x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = 5 \text{ ou } x = -5$$

Comme on doit avoir $x \neq 5$, on conclut que l'ensemble des solutions de (E_6) est donc $\{-5\}$.