⧫ Chapitre 1. — Les ensembles de nombres

I. — Les nombres réels

Définition 1

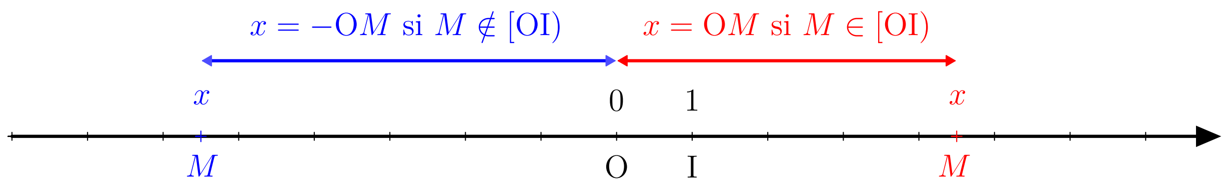
L'ensemble de tous les nombres que nous utilisons est appelé l'ensemble des nombres réels. On note cet ensemble $\mathbb{R}$.

Ainsi, $\mathbb{R}$ contient tous les nombres que nous connaissons : 0, -3, $\frac{1}{3}$, $\sqrt{2}$, π, $0{,}27$, 10^{-3}...

Notation 2. Pour signifier qu'un nombre appartient à un ensemble, on utilise le symbole $\in$ qui se lit « appartient à ». Pour signifier qu'un nombre n'appartient pas à un ensemble, on utilise le symbole $\notin$ qui se lit « n'appartient pas à ».

On peut donc écrire $0 \in \mathbb{R}$, $-3 \in \mathbb{R}$, $\pi \in \mathbb{R}$, $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$, ...

Représentation graphique. — Graphiquement, on peut représenter l'ensemble des nombres réels par une droite graduée appelée « droite réelle ».

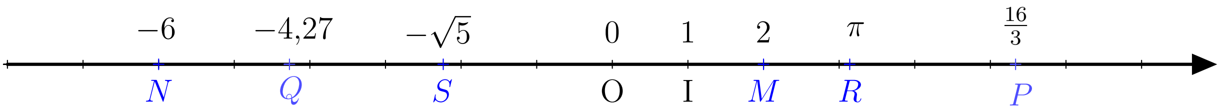


À chaque point M de cette droite, on peut associer un et un seul nombre réel qui correspond à :
— la distance $\mathrm{O}M$ si M appartient à la demi-droite $[\mathrm{OI})$
— l'opposé de la distance $\mathrm{O}M$ sinon.

Définition 3

Dans la correspondance décrite ci-dessus, on dit que le nombre x est l'abscisse du point M sur la droite réelle. On le note alors x_M ce qui se lit « x indice M ».

Exemple 4. Sur la figure ci-dessous, les points M, N, P, Q, R et S ont respectivement pour abscisses 2, -6, $\frac{16}{3}$, $-4{,}27$, π, $-\sqrt{5}$.



Autrement dit, $x_M = 2$, $x_N = -6$, $x_P = \frac{16}{3}$, $x_Q = -4{,}27$, $x_R = \pi$ et $x_S = -\sqrt{5}$.
Notons, de plus, que, par définition, $x_{\mathrm{O}} = 0$ et $x_{\mathrm{I}} = 1$.

II. — Valeur absolue d'un nombre réel

Définition 5

Soit x un nombre réel. On définit la valeur absolue de x notée $|x|$ par :
- $|x| = x$ si $x \geqslant 0$;
- $|x| = -x$ si $x < 0$.

Exemple 6. $|3| = 3$ car $3 \geqslant 0$
$|-2| = -(-2) = 2$ car $2 < 0$
$|0| = 0$ car $0 \geqslant 0$
$|10^{-2}| = 10^{-2}$ car $10^{-2} \geqslant 0$
$\left|\sqrt{2} - 2\right| = -(\sqrt{2} - 2) = 2 - \sqrt{2}$ car $\sqrt{2} - 2 < 0$.

Interprétation graphique. — Soit x un réel et M le point de la droite réelle d'abscisse x. Alors, $|x| = \mathrm{O}M$ car $\mathrm{O}M = x$ si $x \geqslant 0$ et $\mathrm{O}M = -x$ si $x < 0$.

Propriété 7

Soit M et N deux points de la droite réelle. Alors, $MN = |x_M - x_N|$.

Démonstration. On raisonne par disjonction de cas.

1^er^ cas. On suppose que $x_M \geqslant x_N$. Dans ce cas, $MN = x_M - x_N = |x_M - x_N|$ car $x_M - x_N \geqslant 0$.

2^e^ cas. On suppose que $x_M < x_N$. Dans ce cas, $MN = x_N - x_M = -(x_M - x_N) = |x_M - x_N|$ car $x_M - x_N < 0$.

Ainsi, dans tous les cas, $MN = |x_M - x_N|$. □

Remarque 8.

1. Pour tout réel x, $|x| \geqslant 0$ car, si on note M le point d'abscisse x alors $|x| = \mathrm{O}M \geqslant 0$.
2. Si x est un réel alors $|-x| = |x|$. En effet, si on note M le point d'abscisse x alors $|x| = \mathrm{O}M = |0 - x| = |-x|$.

Définition 9

Soit x et y deux nombres réels. Le nombre réel positif $|x - y|$ est appelé la distance entre x et y.

Exemple 10. La distance de 2 à $-1{,}6$ est $|2 - (-1{,}6)| = |3{,}6| = 3{,}6$.

Remarque 11. D'après la propriété 7, la distance entre deux nombres réels x et y est la distance entre les points d'abscisses respectives x et y sur la droite réelle.

III. — Nombres entiers

Définition 12

L'ensemble des entiers naturels est l'ensemble des nombres entiers positifs ou nuls : 0, 1, 2, 3, etc.

On note cet ensemble $\mathbb{N}$.

Exemple 13. $17 \in \mathbb{N}$ mais $-3 \notin \mathbb{N}$.

Définition 14

L'ensemble des entiers relatifs est l'ensemble de tous les nombres entiers (positifs, négatifs ou nuls) : 0, 1, -1, 2, -2, 3, -3 etc.

On note cet ensemble $\mathbb{Z}$.

Exemple 15. $17 \in \mathbb{Z}$ et $-3 \in \mathbb{Z}$ mais $1{,}6 \notin \mathbb{Z}$.

Remarque 16. Tous les entiers naturels sont des entiers relatifs : si $a \in \mathbb{N}$ alors $a \in \mathbb{Z}$. Du point de vue des ensembles, on dit que $\mathbb{N}$ est inclus dans $\mathbb{Z}$ ce qu'on note symboliquement : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

IV. — Nombres décimaux

Définition 17

Un nombre décimal est un nombre réel qui peut s'écrire sous la forme $\frac{a}{10^n}$ où a est un entier relatif et n est un entier naturel.

On note leur ensemble $\mathbb{D}$.

Exemple 18.

1. $\frac{3}{100} \in \mathbb{D}$ car $\frac{3}{100} = \frac{3}{10^2}$.
2. $-0{,}4738 \in \mathbb{D}$ car $-0{,}4738 = \frac{-4738}{10^4}$.
3. $\frac{7}{4} \in \mathbb{D}$ car $\frac{7}{4} = \frac{175}{10^2}$.
4. $7 \in \mathbb{D}$ car $7 = \frac{7}{10^0}$. (Rappel : $10^0 = 1$)

Remarque 19.

1. Tout entier relatif est un décimal. En effet, si $a \in \mathbb{Z}$ alors on peut écrire $a = \frac{a}{10^0}$ donc $a \in \mathbb{D}$. D'un point de vue des ensembles, $\mathbb{Z}$ est donc inclus dans $\mathbb{D}$: $\mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$.
2. L'écriture d'un décimal sous la forme $\frac{a}{10^n}$ n'est pas unique. Par exemple,

$$1{,}7 = \frac{17}{10^1} = \frac{170}{10^2} = \frac{1700}{10^3} = \ldots$$

Propriété 20

Un nombre décimal qui n'est pas entier admet une écriture décimale qui comporte un nombre fini de chiffre après la virgule.

Démonstration. Soit x un nombre décimal non entier. Alors, il existe $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $x = \frac{a}{10^n}$. Comme x n'est pas entier, quitte à simplifier la fraction $\frac{a}{10^n}$ autant de fois que possible par 10, on peut supposer que a n'est pas un multiple de 10. En divisant a par 10^n, on décale la virgule de n rang vers la droite donc x comporte n nombre après la virgule. Son écriture a donc bien un nombre fini de chiffres après la virgule. □

Exemple 21.

1. Soit $x = \frac{153}{10^5}$. Alors, $x = 0{,}00153$ donc l'écriture décimale de x comporte 5 chiffres après la virgule.
2. EXEMPLES À CONNAÎTRE :

$$\frac{1}{2} = 0{,}5, \quad \frac{1}{4} = 0{,}25, \quad \frac{3}{4} = 0{,}75, \quad \frac{1}{5} = 0{,}2, \quad \frac{2}{5} = 0{,}4, \quad \frac{3}{5} = 0{,}2, \quad \frac{4}{5} = 0{,}8.$$

Il existe des nombres réels qui ne sont pas des décimaux. En particulier,

Propriété 22

Le nombre $\frac{1}{3}$ n'est pas décimal.

Démonstration. On raisonne par l'absurde en supposant que $\frac{1}{3}$ est décimal. Alors, comme $\frac{1}{3}$ n'est pas entier, il existe un nombre entier a qui n'est pas un multiple de 10 et un entier naturel n tel $\frac{1}{3} = \frac{a}{10^n}$. Remarquons que, comme $\frac{1}{3}$ n'est pas un entier, $n \geqslant 1$. On a alors $10^n = 3a$. D'une part, le chiffre des unités de 10^n est 0 car $n \geqslant 1$. D'autre, part, comme a n'est pas un multiple de 10, son chiffre des unités n'est pas 0 et on a donc les 9 possibilités suivantes :

chiffre des unités de a	1	2	3	4	5	6	7	8	9
chiffre des unités de $3a$	3	6	9	2	5	8	1	4	7

Ainsi, le nombre $3a$ ne se termine pas 0. On aboutit à une contradiction donc $\frac{1}{3}$ n'est pas décimal. $\square$

Remarque 23. Comme $\frac{1}{3}$ n'est pas un décimal, son écriture décimale contient une infinité de chiffres après la virgule. En l'occurence : $\frac{1}{3} = 0{,}333333...$ et la suite de 3 continue indéfiniment. Ainsi, on peut dire que $\frac{1}{3} \approx 0{,}33$ mais ce n'est qu'une valeur approchée.

De même, en multipliant par 2, $\frac{2}{3} = 0{,}66666...$ et la suite des 6 continue indéfiniment. Ainsi, on peut dire que $\frac{2}{3} \approx 0{,}67$ mais ce n'est qu'une valeur approchée.

Pour finir, remarquons qu'en multipliant par 3, on obtient $1 = 0{,}99999...$ avec une infinité de 9 après la virgule. Ainsi, 1 qui est un nombre décimal (car il est entier) admet aussi un écriture décimale qui comporte une infinité de chiffres après la virgule.

V. — Nombres rationnels et irrationnels

Définition 24

On dit qu'un nombre réel x est rationnel s'il existe un entier relatif a et un entier naturel non nul b tels que $x = \frac{a}{b}$.

On note leur ensemble $\mathbb{Q}$.

Exemple 25.

1. $\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$.
2. $0{,}17 \in \mathbb{Q}$ car $0{,}17 = \frac{17}{100}$.
3. $-1{,}25 \in \mathbb{Q}$ car $-1{,}25 = -\frac{5}{4}$.
4. $12 \in \mathbb{Q}$ car $12 = \frac{12}{1}$.

Remarque 26.

1. Tout nombre décimal est un nombre rationnel puisque si x est un décimal alors il existe deux entiers a et n tel que $x = \frac{a}{10^n}$ et donc, en posant $b = 10^n$ qui est un entier non nul, $x = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$. D'un point de vue ensembliste, $\mathbb{D}$ est inclus dans $\mathbb{Q}$: $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$.
2. L'écriture d'un rationnel sous forme d'une fraction n'est pas unique. Par exemple, $\frac{24}{36} = \frac{12}{18} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$. Parmi ces différentes formes, on privilégie celle pour laquelle le dénominateur est le plus petit possible : c'est la forme irréductible. On l'obtient en simplifiant au maximum la fraction. Ainsi, la forme irréductible de $\frac{24}{36}$ est $\frac{2}{3}$.

Il existe des réels qui ne sont pas rationnels. En particulier,

Propriété 27. — admis provisoirement

Le nombre $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.

Il existe beaucoup d'autres nombres réels qui ne sont pas rationnels comme $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{2}-1$, $\sqrt{4-\sqrt{3}}$, π... Ces nombres sont appelés les nombres irrationnels. Leur ensemble se note $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ce qui se lit « $\mathbb{R}$ privé de $\mathbb{Q}$ » i.e. l'ensemble des réels auquel on a enlevé l'ensemble de rationnels.

*
* *

BILAN. — On a les inclusions suivantes : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.