

◆ Chapitre 1. — Les ensembles de nombres

I. — Les nombres réels

Définition 1

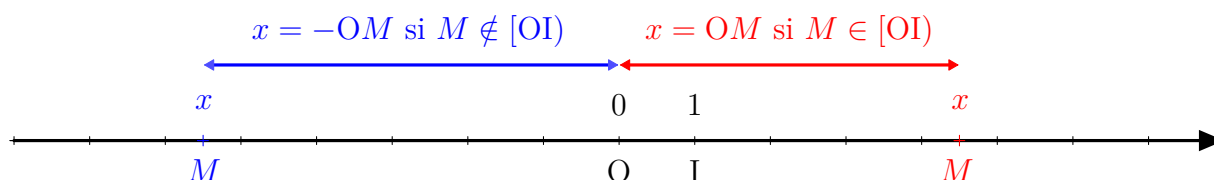
L'ensemble de tous les nombres que nous utilisons est appelé l'ensemble des nombres réels. On note cet ensemble $\mathbb{R}$.

Ainsi, $\mathbb{R}$ contient tous les nombres que nous connaissons : $0, -3, \frac{1}{3}, \sqrt{2}, \pi, 0,27, 10^{-3} \dots$

Notation 2. Pour signifier qu'un nombre appartient à un ensemble, on utilise le symbole $\in$ qui se lit « appartient à ». Pour signifier qu'un nombre n'appartient pas à un ensemble, on utilise le symbole $\notin$ qui se lit « n'appartient pas à ».

On peut donc écrire $0 \in \mathbb{R}, -3 \in \mathbb{R}, \pi \in \mathbb{R}, \sqrt{2} \in \mathbb{R}, \dots$

Représentation graphique. — Graphiquement, on peut représenter l'ensemble des nombres réels par une droite graduée appelée « droite réelle ».



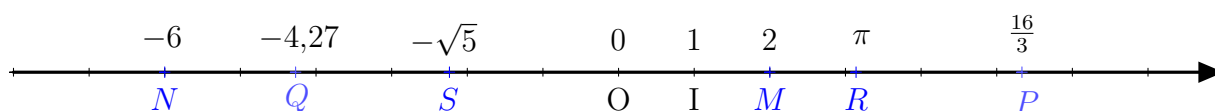
À chaque point M de cette droite, on peut associer un et un seul nombre réel qui correspond à :

- la distance OM si M appartient à la demi-droite $[OI)$
- l'opposé de la distance OM sinon.

Définition 3

Dans la correspondance décrite ci-dessus, on dit que le nombre x est l'abscisse du point M sur la droite réelle. On le note alors x_M ce qui se lit « x indice M ».

Exemple 4. Sur la figure ci-dessous, les points M, N, P, Q, R et S ont respectivement pour abscisses $2, -6, \frac{16}{3}, -4,27, \pi, -\sqrt{5}$.



Autrement dit, $x_M = 2, x_N = -6, x_P = \frac{16}{3}, x_Q = -4,27, x_R = \pi$ et $x_S = -\sqrt{5}$.

Notons, de plus, que, par définition, $x_O = 0$ et $x_I = 1$.

II. — Valeur absolue d'un nombre réel

Définition 5

Soit x un nombre réel. On définit la valeur absolue de x notée $|x|$ par :

- $|x| = x$ si $x \geq 0$;
- $|x| = -x$ si $x < 0$.

Exemple 6. $|3| = 3$ car $3 \geq 0$

$$|-2| = -(-2) = 2 \text{ car } 2 < 0$$

$$|0| = 0 \text{ car } 0 \geq 0$$

$$|10^{-2}| = 10^{-2} \text{ car } 10^{-2} \geq 0$$

$$|\sqrt{2} - 2| = -(\sqrt{2} - 2) = 2 - \sqrt{2} \text{ car } \sqrt{2} - 2 < 0.$$

Interprétation graphique. — Soit x un réel et M le point de la droite réelle d'abscisse x . Alors, $|x| = OM$ car $OM = x$ si $x \geq 0$ et $OM = -x$ si $x < 0$.

Propriété 7

Soit M et N deux points de la droite réelle. Alors, $MN = |x_M - x_N|$.

Démonstration. On raisonne par disjonction de cas.

1^{er} cas. On suppose que $x_M \geq x_N$. Dans ce cas, $MN = x_M - x_N = |x_M - x_N|$ car $x_M - x_N \geq 0$.

2^e cas. On suppose que $x_M < x_N$. Dans ce cas, $MN = x_N - x_M = -(x_M - x_N) = |x_M - x_N|$ car $x_M - x_N < 0$.

Ainsi, dans tous les cas, $MN = |x_M - x_N|$. □

Remarque 8.

1. Pour tout réel x , $|x| \geq 0$ car, si on note M le point d'abscisse x alors $|x| = OM \geq 0$.
2. Si x est un réel alors $|-x| = |x|$. En effet, si on note M le point d'abscisse x alors $|x| = OM = |0 - x| = |-x|$.

Définition 9

Soit x et y deux nombres réels. Le nombre réel positif $|x - y|$ est appelé la distance entre x et y .

Exemple 10. La distance de 2 à $-1,6$ est $|2 - (-1,6)| = |3,6| = 3,6$.

Remarque 11. D'après la propriété 7, la distance entre deux nombres réels x et y est la distance entre les points d'abscisses respectives x et y sur la droite réelle.

III. — Nombres entiers

Définition 12

L'ensemble des entiers naturels est l'ensemble des nombres entiers positifs ou nuls : 0, 1, 2, 3, etc.

On note cet ensemble $\mathbb{N}$.

Exemple 13. $17 \in \mathbb{N}$ mais $-3 \notin \mathbb{N}$.

Définition 14

L'ensemble des entiers relatifs est l'ensemble de tous les nombres entiers (positifs, négatifs ou nuls) : 0, 1, -1, 2, -2, 3, -3 etc.

On note cet ensemble $\mathbb{Z}$.

Exemple 15. $17 \in \mathbb{Z}$ et $-3 \in \mathbb{Z}$ mais $1,6 \notin \mathbb{Z}$.

Remarque 16. Tous les entiers naturels sont des entiers relatifs : si $a \in \mathbb{N}$ alors $a \in \mathbb{Z}$. Du point de vue des ensembles, on dit que $\mathbb{N}$ est inclus dans $\mathbb{Z}$ ce qu'on note symboliquement : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

IV. — Nombres décimaux

Définition 17

Un nombre décimal est un nombre réel qui peut s'écrire sous la forme $\frac{a}{10^n}$ où a est un entier relatif et n est un entier naturel.

On note leur ensemble $\mathbb{D}$.

Exemple 18.

1. $\frac{3}{100} \in \mathbb{D}$ car $\frac{3}{100} = \frac{3}{10^2}$.
2. $-0,4738 \in \mathbb{D}$ car $-0,4738 = \frac{-4738}{10^4}$.
3. $\frac{7}{4} \in \mathbb{D}$ car $\frac{7}{4} = \frac{175}{10^2}$.
4. $7 \in \mathbb{D}$ car $7 = \frac{7}{10^0}$. (Rappel : $10^0 = 1$)

Remarque 19.

1. Tout entier relatif est un décimal. En effet, si $a \in \mathbb{Z}$ alors on peut écrire $a = \frac{a}{10^0}$ donc $a \in \mathbb{D}$. D'un point de vue des ensembles, $\mathbb{Z}$ est donc inclus dans $\mathbb{D}$: $\mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$.
2. L'écriture d'un décimal sous la forme $\frac{a}{10^n}$ n'est pas unique. Par exemple,

$$1,7 = \frac{17}{10^1} = \frac{170}{10^2} = \frac{1700}{10^3} = \dots$$

Propriété 20

Un nombre décimal qui n'est pas entier admet une écriture décimale qui comporte un nombre fini de chiffre après la virgule.

Démonstration. Soit x un nombre décimal non entier. Alors, il existe $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $x = \frac{a}{10^n}$. Comme x n'est pas entier, quitte à simplifier la fraction $\frac{a}{10^n}$ autant de fois que possible par 10, on peut supposer que a n'est pas un multiple de 10. En divisant a par 10^n , on décale la virgule de n rang vers la droite donc x comporte n nombre après la virgule. Son écriture a donc bien un nombre fini de chiffres après la virgule. $\square$

Exemple 21.

1. Soit $x = \frac{153}{10^5}$. Alors, $x = 0,00153$ donc l'écriture décimale de x comporte 5 chiffres après la virgule.
2. EXEMPLES À CONNAÎTRE :

$$\frac{1}{2} = 0,5, \quad \frac{1}{4} = 0,25, \quad \frac{3}{4} = 0,75, \quad \frac{1}{5} = 0,2, \quad \frac{2}{5} = 0,4, \quad \frac{3}{5} = 0,6, \quad \frac{4}{5} = 0,8.$$

Il existe des nombres réels qui ne sont pas des décimaux. En particulier,

Propriété 22

Le nombre $\frac{1}{3}$ n'est pas décimal.

Démonstration. On raisonne par l'absurde en supposant que $\frac{1}{3}$ est décimal. Alors, comme $\frac{1}{3}$ n'est pas entier, il existe un nombre entier a qui n'est pas un multiple de 10 et un entier naturel n tel $\frac{1}{3} = \frac{a}{10^n}$. Remarquons que, comme $\frac{1}{3}$ n'est pas un entier, $n \geq 1$. On a alors $10^n = 3a$. D'une part, le chiffre des unités de 10^n est 0 car $n \geq 1$. D'autre, part, comme a n'est pas un multiple de 10, son chiffre des unités n'est pas 0 et on a donc les 9 possibilités suivantes :

chiffre des unités de a	1	2	3	4	5	6	7	8	9
chiffre des unités de $3a$	3	6	9	2	5	8	1	4	7

Ainsi, le nombre $3a$ ne se termine pas 0. On aboutit à une contradiction donc $\frac{1}{3}$ n'est pas décimal. $\square$

Remarque 23. Comme $\frac{1}{3}$ n'est pas un décimal, son écriture décimale contient une infinité de chiffres après la virgule. En l'occurrence : $\frac{1}{3} = 0,333333\dots$ et la suite de 3 continue indéfiniment. Ainsi, on peut dire que $\frac{1}{3} \approx 0,33$ mais ce n'est qu'une valeur approchée.

De même, en multipliant par 2, $\frac{2}{3} = 0,66666\dots$ et la suite des 6 continue indéfiniment. Ainsi, on peut dire que $\frac{2}{3} \approx 0,67$ mais ce n'est qu'une valeur approchée.

Pour finir, remarquons qu'en multipliant par 3, on obtient $1 = 0,99999\dots$ avec une infinité de 9 après la virgule. Ainsi, 1 qui est un nombre décimal (car il est entier) admet aussi une écriture décimale qui comporte une infinité de chiffres après la virgule.

V. — Nombres rationnels et irrationnels

Définition 24

On dit qu'un nombre réel x est rationnel s'il existe un entier relatif a et un entier naturel non nul b tels que $x = \frac{a}{b}$.

On note leur ensemble $\mathbb{Q}$.

Exemple 25.

1. $\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$.
2. $0,17 \in \mathbb{Q}$ car $0,17 = \frac{17}{100}$.
3. $-1,25 \in \mathbb{Q}$ car $-1,25 = -\frac{5}{4}$.
4. $12 \in \mathbb{Q}$ car $12 = \frac{12}{1}$.

Remarque 26.

1. Tout nombre décimal est un nombre rationnel puisque si x est un décimal alors il existe deux entiers a et n tel que $x = \frac{a}{10^n}$ et donc, en posant $b = 10^n$ qui est un entier non nul, $x = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$. D'un point de vue ensembliste, $\mathbb{D}$ est inclus dans $\mathbb{Q}$: $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$.
2. L'écriture d'un rationnel sous forme d'une fraction n'est pas unique. Par exemple, $\frac{24}{36} = \frac{12}{18} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$. Parmi ces différentes formes, on privilégie celle pour laquelle le dénominateur est le plus petit possible : c'est la forme irréductible. On l'obtient en simplifiant au maximum la fraction. Ainsi, la forme irréductible de $\frac{24}{36}$ est $\frac{2}{3}$.

Il existe des réels qui ne sont pas rationnels. En particulier,

Propriété 27

Le nombre $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.

Démonstration. On raisonne par l'absurde en supposant que $\sqrt{2}$ est rationnel. Alors, il existe deux entiers naturels a et b tels que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$. Parmi tous les entiers naturels b possibles, on choisit celui qui est le plus petit. Comme $1 < \sqrt{2} < 2$, $1 < \frac{a}{b} < 2$ donc, comme $b > 0$, $b < a < 2b$ et ainsi $0 < a - b < b$. Or, comme $a = \sqrt{2}b$, $a^2 = (\sqrt{2}b)^2 = 2b^2$ donc $a^2 - ab = 2b^2 - ab$ i.e. $a(a - b) = b(2b - a)$. Ainsi, $\sqrt{2} = \frac{a}{b} = \frac{2b-a}{a-b}$. On a donc une autre écriture de $\sqrt{2}$ sous la forme d'une fraction. Mais le dénominateur est $a - b$ qui est positif et strictement inférieur à b ce qui est absurde car on a choisit b le plus petit possible. Ainsi, $\sqrt{2}$ est irrationnel. $\square$

Il existe beaucoup d'autres nombres réels qui ne sont pas rationnels comme $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{2} - 1$, $\sqrt{4 - \sqrt{3}}$, π ... Ces nombres sont appelés les nombres irrationnels. Leur ensemble se note $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ce qui se lit « $\mathbb{R}$ privé de $\mathbb{Q}$ » i.e. l'ensemble des réels auquel on a enlevé l'ensemble de rationnels.

*
* *

BILAN. — On a les inclusions suivantes : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

