

◆ Chapitre 11. — Fonctions de référence

I. — La fonction carré

Définition 1

La fonction carré est la fonction $f : x \mapsto x^2$ définie sur $\mathbb{R}$.

Exemple 2. Si f est la fonction carré alors $f(1) = 1^2 = 1$, $f(2) = 2^2 = 4$, $f(-3) = (-3)^2 = 9$, $f(0) = 0^2 = 0$ et $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}^2 = 2$.

Propriété 3

La fonction carré est strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$ et strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

Démonstration. Notons f la fonction carré. Soit a et b deux réels tels que $a < b$. Alors,

$$f(b) - f(a) = b^2 - a^2 = (b - a)(b + a).$$

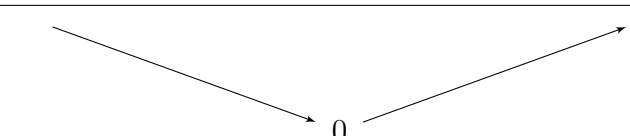
Comme $a < b$, $b - a > 0$ donc le signe de $f(b) - f(a)$ est le signe de $b + a$.

Il y a deux cas possibles :

- si a et b sont positifs alors $a + b > 0$ donc $f(b) - f(a) > 0$ i.e. $f(b) > f(a)$. Ainsi, f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.
- si a et b sont négatifs alors $a + b \leq 0$ donc $f(b) - f(a) < 0$ i.e. $f(b) < f(a)$. Ainsi, f est strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$.

□

On aboutit donc au tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Variation de $x \mapsto x^2$			

Exemple 4.

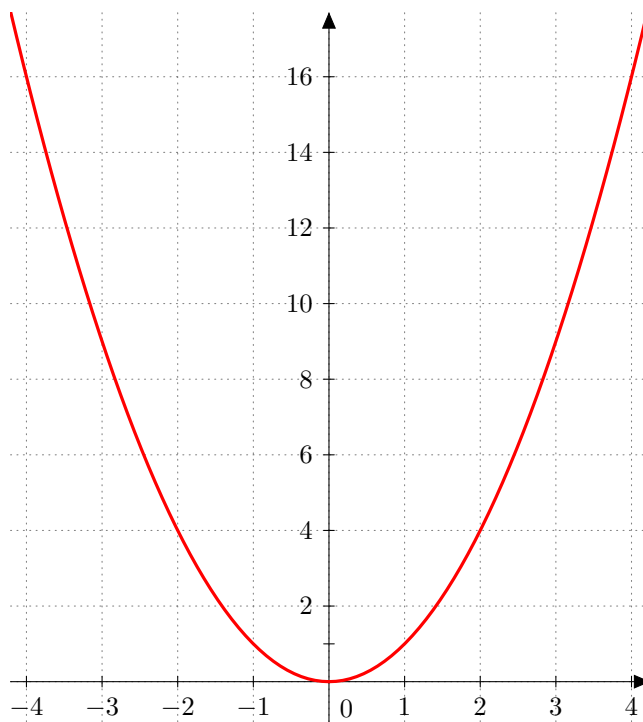
1. Comme $\pi > 3 \geq 0$, par stricte croissance de la fonction carré sur $[0; +\infty[$, $\pi^2 > 3^2$ c'est-à-dire $\pi^2 > 9$.
2. Comme $-2 < -1,99 \leq 0$, par strictement décroissance de la fonction carré sur $]-\infty; 0]$, $(-2)^2 > (-1,99)^2$ c'est-à-dire $4 > (-1,99)^2$.

Propriété 5

La fonction carré est paire.

Démonstration. Notons f la fonction carré. Alors, f est définie sur $\mathbb{R}$ qui est centré en 0. De plus, pour tout réel x , $f(-x) = (-x)^2 = (-1)^2 \times x^2 = x^2 = f(x)$ donc f est paire. $\square$

La courbe représentative $\mathcal{P}$ de la fonction carré dans un repère orthogonal est tracée ci-dessous. Comme la fonction carré est paire, $\mathcal{P}$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. La courbe $\mathcal{P}$ est appelée une parabole.



Propriété 6

Soit a un réel.

1. Si $a > 0$ alors l'ensemble des solutions de l'équation $x^2 = a$ est $\{-\sqrt{a}; \sqrt{a}\}$ et l'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2 \leq a$ est $[-\sqrt{a}; \sqrt{a}]$.
2. Si $a = 0$ alors l'ensemble des solutions de l'équation $x^2 = a$ est $\{0\}$ et l'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2 \leq 0$ est $\{0\}$.
3. Si $a < 0$ alors l'ensemble des solutions de l'équation $x^2 = a$ est vide et l'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2 \leq a$ est vide.

Démonstration.

1. On suppose que $a > 0$. Alors, $x^2 - a = x^2 - \sqrt{a}^2 = (x - \sqrt{a})(x + \sqrt{a})$. Dès lors,

$$\begin{aligned} x^2 = a &\Leftrightarrow x^2 - a = 0 \Leftrightarrow (x - \sqrt{a})(x + \sqrt{a}) = 0 \\ &\Leftrightarrow x - \sqrt{a} = 0 \text{ ou } x + \sqrt{a} = 0 \\ &\Leftrightarrow x = \sqrt{a} \text{ ou } x = -\sqrt{a} \end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de $x^2 = a$ est $\{-\sqrt{a}; \sqrt{a}\}$.

De même, $x^2 \leq a$ équivaut à $(x - \sqrt{a})(x + \sqrt{a}) \leq 0$. Étudions le signe de $A(x) = (x - \sqrt{a})(x + \sqrt{a})$ à l'aide d'un tableau :

x	$-\infty$	$-\sqrt{a}$	$\sqrt{a}$	$+\infty$	
signe de $x - \sqrt{a}$	$-$	$-$	0	$+$	
signe de $x + \sqrt{a}$	$-$	0	$+$	$+$	
signe de $A(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

On conclut que l'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2 \leq a$ est $[-\sqrt{a}; \sqrt{a}]$.

- Supposons $a = 0$. Alors, l'équation $x^2 = a$ devient $x^2 = 0$ qui équivaut à $x = 0$ donc l'ensemble des solutions des $\{0\}$. De plus, l'inéquation $x^2 \leq 0$ devient $x^2 \leq 0$ donc, comme, pour tout réel x , $x^2 \geq 0$, cette inéquation équivaut à $x^2 = 0$ et retrouve le même ensemble de définition que pour l'équation.
- Supposons que $a < 0$. Comme, pour tout réel x , $x^2 \geq 0$, l'équation $x^2 = a$ et l'inéquation $x^2 \leq 0$ n'ont pas de solutions dans $\mathbb{R}$.

□

II. — La fonction racine carrée

Définition 7

La fonction racine carrée est la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$ définie sur $[0; +\infty[$.

Exemple 8. Si f est la fonction racine carrée alors $f(1) = \sqrt{1} = 1$, $f(2) = \sqrt{2}$, $f(4) = \sqrt{4} = 2$, $f(0) = \sqrt{0} = 0$ et $f(\sqrt{2}) = \sqrt{\sqrt{2}}$.

Propriété 9

La fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

Démonstration. Notons f la fonction racine carrée. Soit a et b deux réels tels que $a < b$. Si $\sqrt{a} \geq \sqrt{b}$ alors, comme la fonction carré est strictement croissante sur $[0; +\infty[$, $\sqrt{a}^2 \geq \sqrt{b}^2$ c'est-à-dire $a \geq b$ ce qui contredit l'hypothèse sur a et b . Ainsi, $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ c'est-à-dire $f(a) < f(b)$. On conclut que f est bien strictement croissante sur $[0; +\infty[$. □

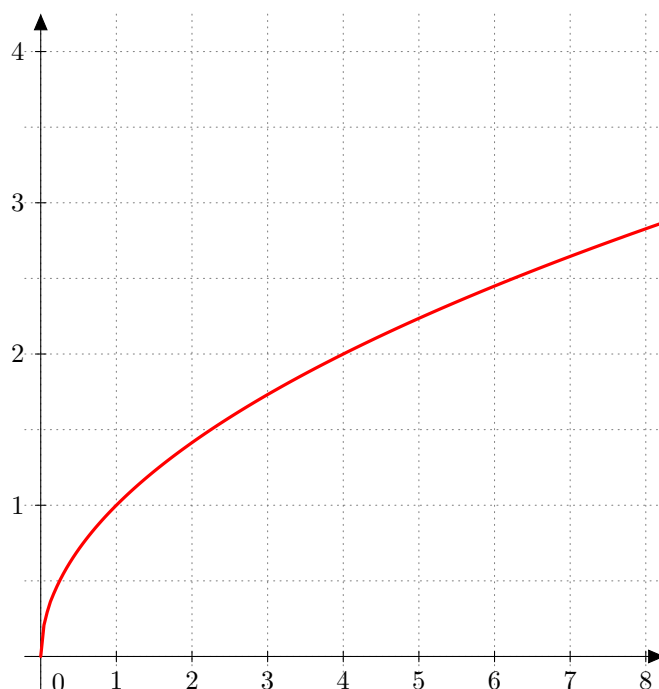
Exemple 10.

- Comme $0 \leq \pi < 4$, par stricte croissance de la fonction racine carrée sur $[0; +\infty[$, $\sqrt{\pi} < \sqrt{4}$ c'est-à-dire $\sqrt{\pi} < 2$.
- Comme $0 \leq 8 < 9$, par stricte croissance de la fonction racine carrée sur $[0; +\infty[$, $\sqrt{8} < \sqrt{9}$ c'est-à-dire $\sqrt{2 \times 4} < 3$ soit encore $2\sqrt{2} < 3$.

Exercice 11. Comparer, sans calculatrice, $a = 2\sqrt{3}$ et $b = 3\sqrt{2}$.

Solution. Plutôt que de comparer a et b , on va comparer leur carré. On a $a^2 = (2\sqrt{3})^2 = 2^2 \times \sqrt{3}^2 = 4 \times 3 = 12$ et $b^2 = (3\sqrt{2})^2 = 3^2 \times \sqrt{2}^2 = 9 \times 2 = 18$. Ainsi, $a^2 < b^2$ donc, par stricte croissance de la fonction racine carrée sur $[0; +\infty[$, $\sqrt{a^2} < \sqrt{b^2}$ et, comme $a > 0$ et $b > 0$, on en déduit que $a < b$.

La courbe représentative de la fonction racine carrée dans un repère orthogonal est tracée ci-dessous.



Propriété 12

Pour tous réels strictement positifs, $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

Démonstration. Soit a et b deux réels strictement positifs. Posons $A = \sqrt{a+b}$ et $B = \sqrt{a} + \sqrt{b}$. Alors, $A^2 = a+b$ et $B^2 = (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = \sqrt{a}^2 + 2\sqrt{a}\sqrt{b} + \sqrt{b}^2 = a + 2\sqrt{ab} + b = A^2 + 2\sqrt{ab}$. Or, comme $a > 0$ et $b > 0$, $ab > 0$ donc, par stricte croissance de la fonction racine carrée sur $[0; +\infty[$, $\sqrt{ab} > \sqrt{0}$ c'est-à-dire $\sqrt{ab} > 0$. Ainsi, $2\sqrt{ab} > 0$ donc $A^2 + 2\sqrt{ab} > A^2$ c'est-à-dire $B^2 > A^2$. Toujours par stricte croissance de la fonction racine carrée sur $[0; +\infty[$, $\sqrt{B^2} > \sqrt{A^2}$ c'est-à-dire, puisque A et B sont positifs, $B > A$. Ainsi, $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a+b}$. $\square$

Remarque 13. En particulier, si a et b sont deux réels strictement positifs alors $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

III. — La fonction cube

Définition 14

La fonction cube est la fonction $f : x \mapsto x^3$ définie sur $\mathbb{R}$.

Exemple 15. Si f est la fonction cube alors $f(1) = 1^3 = 1$, $f(2) = 2^3 = 8$, $f(-3) = (-3)^3 = -27$, $f(0) = 0^3 = 0$ et $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}^3 = \sqrt{2}^2 \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$.

Propriété 16

La fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Démonstration. Notons f la fonction cube. Soit a et b deux réels tels que $a < b$.

Alors, $f(b) - f(a) = b^3 - a^3$. Ici, factoriser est moins évident. On va montrer que

$$b^3 - a^3 = (b - a) \left[\left(b + \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{3a^2}{4} \right].$$

En effet, grâce aux identités remarquables,

$$\left(b + \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{3a^2}{4} = b^2 + 2 \times b \times \frac{a}{2} + \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{3a^2}{4} = b^2 + ba + \frac{a^2}{4} + \frac{3a^2}{4} = b^2 + ba + \frac{4a^2}{4} = b^2 + ba + a^2$$

donc

$$(b - a) \left[\left(b + \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{3a^2}{4} \right] = (b - a)(b^2 + ba + a^2) = b^3 + b^2a + ba^2 - ab^2 - ba^2 - a^3 = b^3 - a^3.$$

Ainsi, $f(b) - f(a) = (b - a) \left[\left(b + \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{3a^2}{4} \right]$. Comme $b > a$, $b - a > 0$. De plus, si $a \neq 0$, $a^2 > 0$ donc $\left(b + \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{3a^2}{4} \geq \frac{3a^2}{4} > 0$ et si $a = 0$ alors $b > 0$ donc $\left(b + \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{3a^2}{4} = b^2 > 0$. Dans tous les cas $\left(b + \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{3a^2}{4} > 0$ donc, par produit, $(b - a) \left[\left(b + \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{3a^2}{4} \right] > 0$ et ainsi $f(b) - f(a) > 0$. On conclut donc que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. $\square$

Exemple 17.

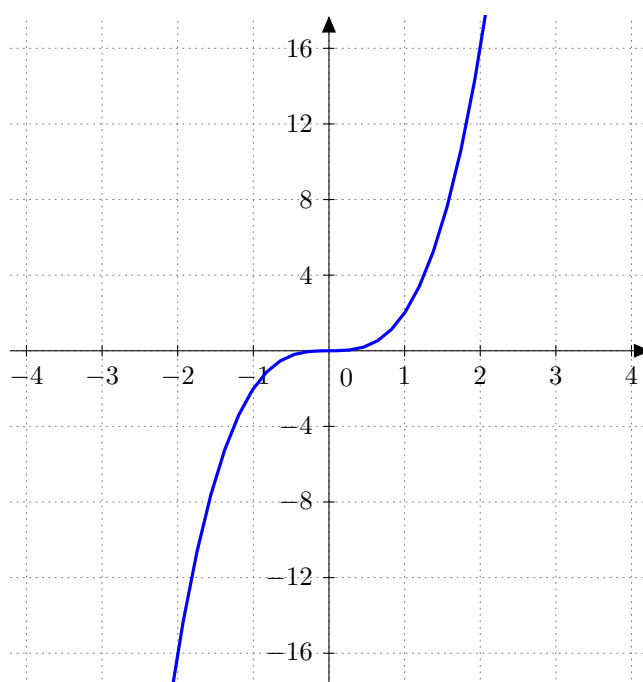
1. Comme $\pi > 3$, par stricte croissance de la fonction cube sur $\mathbb{R}$, $\pi^3 > 3^3$ c'est-à-dire $\pi^3 > 27$.
2. Comme $\sqrt{2} \approx 1,414$, $\sqrt{2} < 1,5$ donc, par strictement croissance de la fonction cube sur $\mathbb{R}$, $\sqrt{2}^3 < 1,5^3$ c'est-à-dire $2\sqrt{2} < 1,5^3$.

Propriété 18

La fonction cube est impaire.

Démonstration. Notons f la fonction cube. Alors, f est définie sur $\mathbb{R}$ qui est centré en 0. De plus, pour tout réel x , $f(-x) = (-x)^3 = -x \times (-x)^2 = -x \times x^2 = -x^3 = -f(x)$ donc f est impaire. $\square$

La courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction cube dans un repère orthogonal est tracée ci-dessous. Comme la fonction cube est impaire, $\mathcal{C}$ est symétrique par rapport à l'origine du repère.



Propriété 19

Soit x un réel positif.

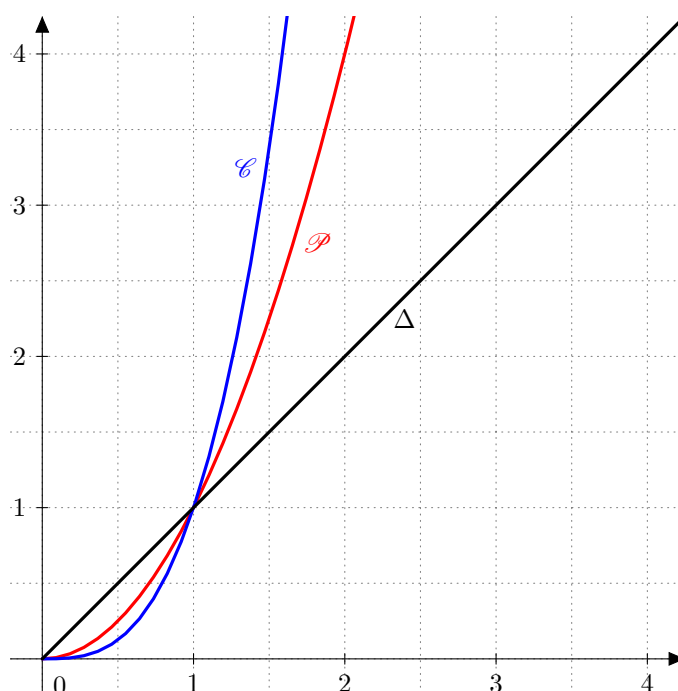
1. Si $0 \leq x \leq 1$ alors $x^3 \leq x^2 \leq x$.
2. Si $x \geq 1$ alors $x \leq x^2 \leq x^3$.

Démonstration.

1. Supposons que $0 \leq x \leq 1$. Alors, comme $x \geq 0$, en multipliant l'inégalité $x \leq 1$ par x , on obtient $x^2 \leq x$. En multipliant une nouvelle fois par $x \geq 0$, on obtient $x^3 \leq x^2$. Ainsi, on a bien $x^3 \leq x^2 \leq x$.
2. Supposons que $x \geq 1$. Alors, en particulier, $x \geq 0$ donc, en multipliant l'inégalité $x \geq 1$ par x , on obtient $x^2 \geq x$ et, en multipliant une nouvelle fois par $x \geq 0$, on obtient $x^3 \geq x^2$. Ainsi, on a bien $x^3 \geq x^2 \geq x$.

□

Remarque 20. D'un point de vue graphique, le propriété précédente nous apprend que sur l'intervalle $[0; 1]$, la courbe $\mathcal{C}$ de la fonction cube est en dessous de la courbe $\mathcal{P}$ de la fonction carré qui est elle-même en dessous de la droite Δ d'équation $y = x$ et sur l'intervalle $[1; +\infty[$, la courbe $\mathcal{C}$ est au-dessus de la courbe $\mathcal{P}$ qui est elle-même au-dessus de la droite Δ .



Exemple 21.

1. Comme $\sqrt{2} \geq 1$, $\sqrt{2} \leq \sqrt{2}^2 \leq \sqrt{2}^3$ c'est-à-dire $\sqrt{2} \leq 2 \leq 2\sqrt{2}$.
2. Comme $0 \leq \frac{1}{2} \leq 1$, $\frac{1}{2} \geq (\frac{1}{2})^2 \geq (\frac{1}{2})^3$ c'est-à-dire $\frac{1}{2} \geq \frac{1}{4} \geq \frac{1}{8}$.

IV. — La fonction inverse

Définition 22

La fonction inverse est la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$ c'est-à-dire sur $] -\infty ; 0[\cup] 0 ; +\infty [$

Exemple 23. Si f est la fonction inverse alors $f(1) = \frac{1}{1} = 1$, $f(2) = \frac{1}{2} = 0,5$, $f(-3) = \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}$ et $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 1 \times \frac{2}{1} = 2$.

Propriété 24

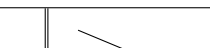
La fonction inverse est strictement décroissante sur chacun des deux intervalles $] -\infty ; 0[$ et $] 0 ; +\infty [$.

Démonstration. Notons f la fonction inverse. Soit a et b deux réels non nuls tels que $a < b$. Alors,

$$f(b) - f(a) = \frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{a}{ab} - \frac{b}{ab} = \frac{a-b}{ab}.$$

Comme $a < b$, $a - b < 0$ donc le signe de $f(b) - f(a)$ est le signe contraire de ab . Or, sur chacun des deux intervalles $] -\infty ; 0[$ et $] 0 ; +\infty [$, le produit ab est strictement positif. Ainsi, $f(b) - f(a) < 0$ donc $f(b) < f(a)$ c'est-à-dire f est strictement décroissante sur $] -\infty ; 0[$ et sur $] 0 ; +\infty [$. $\square$

On aboutit donc au tableau de variation suivant. Dans ce tableau, la double-barre en dessous de 0 signifie que la fonction inverse n'est pas définie en 0.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Variation de $x \mapsto \frac{1}{x}$			

Exemple 25.

- Comme $0 < 2 < 3$, par stricte décroissance de la fonction inverse sur $] 0 ; +\infty [$, $\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$.
- Comme $-3 < -2$, par stricte décroissance de la fonction inverse sur $] -\infty ; 0[$, $\frac{1}{-3} > \frac{1}{-2}$ c'est-à-dire $-\frac{1}{3} > -\frac{1}{2}$.

Remarque 26.

- On ne peut pas appliquer la propriété 23 pour comparer les inverses de nombres de signes différents. Cependant, dans ce cas, la comparaison est évidente car l'un est positif et l'autre négatif. Par exemple, si $a = 2$ et $b = -3$, on ne peut pas appliquer la propriété 23 pour comparer $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{b}$ mais il suffit de dire que $\frac{1}{a} = \frac{1}{2} > 0$ et $\frac{1}{b} = \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3} < 0$ donc $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.
- La propriété 23 ne s'applique pas non plus si on a une inégalité du type $a > 0$ ou $a < 0$ pour déterminer une inégalité sur $\frac{1}{a}$. Cependant, dans ce cas encore, il suffit de raisonner sur le signe. Si $a > 0$ alors $\frac{1}{a} > 0$ comme quotient de nombres positifs et si $a < 0$ alors $\frac{1}{a} < 0$ comme quotient de nombres de signes contraires.

Propriété 27

La fonction inverse est impaire.

Démonstration. Notons f la fonction inverse. Alors, f est définie sur $\mathbb{R}^*$ qui est centré en 0 (car si $x \neq 0$ alors $-x \neq 0$). De plus, pour tout réel $x \neq 0$,

$$f(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -f(x)$$

donc f est impaire. □

La courbe représentative $\mathcal{H}$ de la fonction inverse dans un repère orthogonal est tracée ci-dessous. Comme la fonction inverse est impaire, $\mathcal{H}$ est symétrique par rapport à l'origine du repère. La courbe $\mathcal{H}$ est appelée une hyperbole. Comme la fonction inverse n'est pas définie en 0, la courbe $\mathcal{H}$ est formée de deux parties appelés les branches de l'hyperbole.

