

◆ Chapitre 10. — Équations de droites dans le plan

Dans tout le chapitre, le plan est muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

I. — Équations cartésiennes d'une droite

1) Vecteurs directeurs

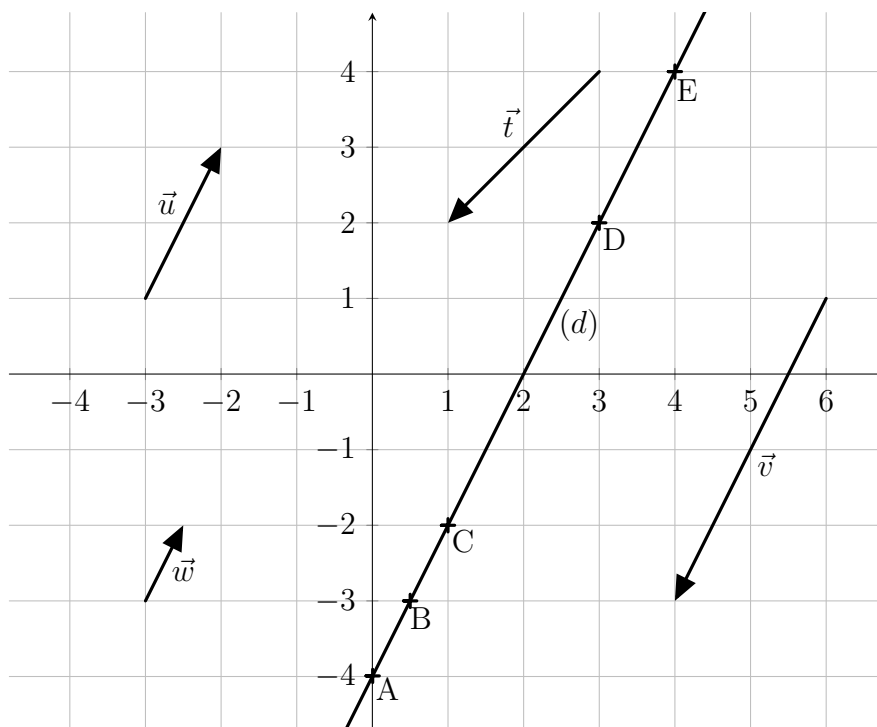
Définition 1

Soit (d) une droite du plan. On dit qu'un vecteur non nul $\vec{v}$ est un vecteur directeur de (d) s'il existe deux points A et B appartenant à (d) tels que $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$.

Remarque 2.

1. Par définition, un vecteur directeur est un vecteur non nul.
2. Dire que $\vec{v}$ est un vecteur directeur de (d) revient à dire que la direction de $\vec{v}$ est donnée par la droite (d) .
3. Une droite possède une infinité de vecteurs directeurs différents qui sont tous colinéaires.
4. Si $\vec{v}$ est un vecteur directeur d'une droite (d) , on dira que (d) est dirigée par $\vec{v}$.

Exemple 3. On considère la droite (d) et les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et $\vec{t}$ représentés ci-dessous.



Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont des vecteurs directeurs de la droite (d) car $\vec{u} = \overrightarrow{DE}$, $\vec{v} = \overrightarrow{DC}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{AB}$. En revanche, $\vec{t}$ n'est pas un vecteur directeur de (d) car il n'est pas colinéaire avec $\vec{u}$ (par exemple) puisque $\vec{u}(1; 2)$ et $\vec{t}(-2; -2)$ donc $\det(\vec{u}, \vec{t}) = 1 \times (-2) - 2 \times (-2) = 2 \neq 0$.

Propriété 4

Soit (d) et (d') deux droites. Soit $\vec{v}$ un vecteur directeur de (d) et $\vec{v}'$ un vecteur directeur de (d') . Alors, (d) est parallèle à (d') si et seulement si $\vec{v}$ et $\vec{v}'$ sont colinéaires.

Démonstration. Comme les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{v}'$ sont non nuls, ils sont colinéaires si et seulement s'ils ont la même direction ce qui équivaut à dire que (d) et (d') sont parallèles. $\square$

2) Équations cartésiennes d'une droite

Propriété 5

Soit (d) une droite du plan. Alors, il existe trois réels a , b et c avec $(a; b) \neq (0; 0)$ tels qu'un point M de coordonnées $(x; y)$ appartienne à (d) si et seulement si $ax + by + c = 0$.

Démonstration. Considérons un vecteur directeur $\vec{v}$ de (d) et un point $A(x_A; y_A)$ appartenant à (d) . Notons $(r; s)$ le couple des coordonnées de $\vec{v}$.

Soit $M(x; y)$ un point quelconque du plan. Supposons dans un premier temps que $M \neq A$. Alors, le vecteur $\overrightarrow{AM}$ est non nul donc M appartient à (d) si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ est un vecteur directeur de (d) . Or, cela équivaut à dire que $\overrightarrow{AM}$ est colinéaire à $\vec{v}$ c'est-à-dire que $\det(\overrightarrow{AM}, \vec{v}) = 0$. Remarquons que ceci reste vrai si $M = A$ car dans ce cas $A \in (d)$ et $\det(\overrightarrow{AM}, \vec{v}) = \det(\vec{0}, \vec{v}) = 0$.

Par propriété, les coordonnées de $\overrightarrow{AM}$ sont $(x - x_A; y - y_A)$ donc

$$\det(\overrightarrow{AM}, \vec{v}) = (x - x_A) \times s - (y - y_A) \times r = sx - ry - sx_A + ry_A.$$

Posons $a = s$, $b = -r$ et $c = -sx_A + ry_A$ qui un réel ne dépendant que de $\vec{v}$ et de A (mais pas de M). Ainsi, $\det(\overrightarrow{AM}, \vec{v}) = ax + by + c$. Comme M appartient à (d) si et seulement si $\det(\overrightarrow{AM}, \vec{v}) = 0$, on conclut que M appartient à (d) si et seulement si $ax + by + c = 0$ ce qui établit le résultat voulu. $\square$

La propriété précédente montre que toute droite du plan admet une équation de la forme $ax + by + c = 0$. Montrons à présent la propriété réciproque.

Propriété 6

Soit a , b et c des réels tels que $(a; b) \neq (0; 0)$. Alors, l'ensemble des points $M(x; y)$ du plan tels que $ax + by + c = 0$ est une droite dirigée par le vecteur $\vec{v}(-b; a)$.

Démonstration. Notons E l'ensemble des points $M(x; y)$ du plan tels que $ax + by + c = 0$. Remarquons que E est non vide. En effet, par hypothèse, au moins un des deux nombres a ou b est non nul. Si $a \neq 0$ alors le point de coordonnées $(-\frac{c}{a}; 0)$ appartient à E car $a \times (-\frac{c}{a}) + b \times 0 + c = -c + c = 0$ et si $b \neq 0$ alors le point de coordonnées $(0; -\frac{c}{b})$ appartient à E car $a \times 0 + b \times (-\frac{c}{b}) + c = -c + c = 0$.

Considérons un point A appartenant à E et notons $\vec{v}$ le vecteur de coordonnées $(-b; a)$. C'est un vecteur non nul car $(a; b) \neq (0; 0)$. Notons (d) la droite passant par A et dirigée par le vecteur $\vec{v}$. La démonstration de la propriété précédente montre qu'un point $M(x; y)$ appartient à la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{v}(r; s)$ si et seulement si $sx - ry + (-sx_A + ry_A) = 0$.

Or, dans notre cas, $r = -b$ et $s = a$ donc $M(x; y)$ appartient à (d) si et seulement si $ax - (-b)y + (-ax_A - by_A) = 0$ c'est-à-dire $ax + by - (ax_A + by_A) = 0$.

Or, par hypothèse, le point A appartient à E donc $ax_A + by_A + c = 0$ c'est-à-dire $c = -(ax_A + by_A)$. On en déduit que $M(x; y)$ appartient à (d) si et seulement si $ax + by + c = 0$ c'est-à-dire si et seulement si M appartient à E . Ainsi, $E = (d)$ donc E est bien une droite dirigée par $\vec{v}(-b; a)$. $\square$

Définition 7

Une équation de la forme $ax + by + c = 0$ avec $(a; b) \neq (0; 0)$ est appelée une équation cartésienne de droite.

Remarque 8.

1. Les propriétés 5 et 6 montre que toute droite admet une équation cartésienne de la forme $ax + by + c = 0$ avec $(a; b) \neq (0; 0)$ et que, réciproquement, toute équation de cette forme est bien l'équation cartésienne d'une droite.
2. Une équation cartésienne de droite n'est pas unique. Par exemple, $x - 2y + 3 = 0$ et $2x - 4y + 6 = 0$ sont deux équations équivalentes (on obtient la seconde en multipliant la première par 2) donc elles définissent la même droite.
3. De façon équivalente, on peut également écrire une équation cartésienne de droite sous la forme $ax + by = c'$ (dans ce cas $c' = -c$).

Exemple 9. Considérons la droite (d) d'équation cartésienne $5x + 6y + 3 = 0$. Alors, un vecteur directeur (d) est le vecteur $\vec{v}(-6; 5)$ car ici $a = 5$ et $b = 6$ donc $-b = -6$ et $a = 5$.

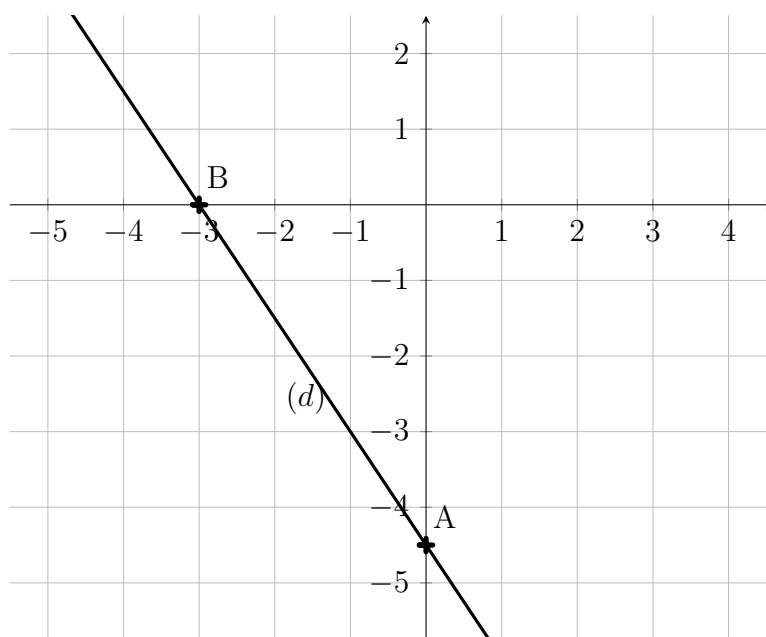
Méthode 10 : Tracer une droite connaissant une équation cartésienne

Pour tracer une droite, il suffit de connaître deux points de celle-ci. Grâce à l'équation cartésienne d'une droite (d) , il est facile de déterminer deux points de cette droite en donnant des valeurs arbitraires à x (ou y) et en trouvant la valeur de y (ou x) correspondant.

Exemple 11. Considérons la droite d'équation cartésienne $3x - 2y + 9 = 0$. En prenant $x = 0$, on obtient $3 \times 0 - 2y + 9 = 0$ donc $-2y = -9$ c'est-à-dire $y = 4,5$ donc le point A(0; 4,5) appartient à (d) . De même, en prenant $y = 0$, on obtient $3x - 2 \times 0 + 9 = 0$ donc $3x + 9 = 0$ c'est-à-dire $x = -3$ donc le point B(-3; 0) appartient à (d) .

Il ne reste plus qu'à placer les points A et B et à tracer la droite (d) (voir la figure sur la page suivante).

Remarque 12. Dans l'exemple précédent, les choix $x = 0$ puis $y = 0$ sont arbitraires, on aurait pu prendre n'importe quelles autres valeurs. Cependant, ces choix donnent en général des calculs assez simples.



Méthode 13 : Déterminer une équation cartésienne d'une droite

Soit (d) une droite passant par un point A et dirigée par un vecteur $\vec{v}$. Pour déterminer une équation cartésienne de (d) , il suffit de reprendre la méthode de la propriété 5 en écrivant qu'un point $M(x; y)$ appartient à (d) si et seulement si $\det(\overrightarrow{AM}, \vec{v}) = 0$.

Exemple 14. Déterminons une équation cartésienne de la droite (d) passant par le point $A(-2; 3)$ et dirigée par le vecteur $\vec{v}(5; -1)$.

Un point $M(x; y)$ appartient à (d) si et seulement si $\det(\overrightarrow{AM}, \vec{v}) = 0$. Or, $\overrightarrow{AM}(x + 2; y - 3)$ et $\vec{v}(5; -1)$ donc $\det(\overrightarrow{AM}, \vec{v}) = (x + 2) \times (-1) - (y - 3) \times 5 = -x - 2 - 5y + 15 = -x - 5y + 13$.

On conclut donc qu'une équation cartésienne de (d) est $-x - 5y + 13 = 0$.

Remarquons qu'en multipliant par -1 , on obtient l'équation équivalente $x + 5y - 13 = 0$ donc $x + 5y - 13 = 0$ est aussi une équation cartésienne de (d) . Cette équation peut aussi se réécrire $x + 5y = 13$.

Remarque 15. Il est facile d'adapter la méthode précédente au cas où on donne non pas un point et un vecteur directeur mais deux points de la droite. En effet, si A et B sont deux points distincts d'une droite (d) alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de (d) donc il suffit d'appliquer la méthode précédente en prenant le point A et le vecteur $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$.

II. — Équation réduite d'une droite

Les équations réduites de droites ont déjà été vues au collège. Elles sont de deux formes : soit de la forme $y = mx + p$ soit de la forme $x = k$ où m , p et k sont des constantes réelles. C'est ce que nous démontrons à présent.

Commençons par remarquer que $y = mx + p$ et $x = k$ sont bien des équations de droites car la première équivaut à $mx - y + p = 0$ qui est une équation cartésienne de droite (avec $a = m$, $b = -1$ et $c = p$) et la seconde équivaut à $x - k = 0$ qui est une équation cartésienne de droite (avec $a = 1$, $b = 0$ et $c = -k$).

Réciproquement, on a la propriété suivante.

Propriété 16

Soit (d) une droite du plan. Alors, (d) admet une équation de la forme $y = mx + p$ (où m et p sont des réels quelconques) si (d) n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées ou une équation de la forme $x = k$ (où k est un réel quelconque) sinon.

De plus, cette équation est unique : on l'appelle l'équation réduite de (d) .

Démonstration. Considérons une équation cartésienne de (d) : $ax + by + c = 0$ avec $(a; b) \neq (0; 0)$. Dans ce cas, le vecteur $\vec{v}(-b; a)$ est un vecteur directeur de (d) .

1^{er} cas. Supposons que (d) n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées. Alors, $b \neq 0$ sinon $\vec{v}$ aurait pour coordonnées $(0; a)$ donc il serait colinéaire au vecteur $\vec{j}(0; 1)$ et donc (d) serait parallèle à l'axe des ordonnées. On en déduit que

$$ax + by + c = 0 \Leftrightarrow by = -ax - c \Leftrightarrow y = \frac{-ax - c}{b} \Leftrightarrow y = \frac{-a}{b}x + \frac{-c}{b}$$

Ainsi, en posant $m = \frac{-a}{b}$ et $p = \frac{-c}{b}$, on a l'équivalence entre $ax + by + c = 0$ et $y = mx + p$ donc (d) admet bien une équation de la forme $y = mx + p$.

Supposons que (d) est une autre équation de la forme $y = m'x + p'$. Le point de coordonnées $(0; p)$ appartient à (d) car $m \times 0 + p = p$ donc $m' \times 0 + p' = p$ et donc $p = p'$. De plus, le point de coordonnées $(1; m + p)$ appartient à (d) car $m \times 1 + p = m + p$ donc $m' \times 1 + p' = m + p$ c'est-à-dire $m' + p' = m + p$. Or, on vient de voir que $p = p'$ donc $m' + p = m + p$ et on conclut que $m' = m$. Ainsi, l'équation réduite de (d) est bien unique.

2nd cas. Supposons que (d) est parallèle à l'axe des ordonnées. Alors, $b = 0$ car $\vec{v}$ est colinéaire à $\vec{j}$. Ainsi, (d) a une équation cartésienne de la forme $ax + c = 0$. De plus, comme $(a; b) \neq (0; 0)$ et $b = 0$, $a \neq 0$ donc $ax + c = 0$ équivaut à $x = \frac{-c}{a}$. En posant $k = \frac{-c}{a}$, on conclut que $ax + c = 0$ équivaut à $x = k$ donc (d) admet bien une équation de la forme $x = k$.

Si $x = k'$ est une autre équation de (d) alors, comme le point de coordonnées $(k; 0)$ appartient à (d) , on a $k = k'$ donc l'équation réduite de (d) est bien unique. $\square$

Exemple 17. Reprenons la droite (d) de l'exemple 14. Une équation cartésienne de (d) est $x + 5y - 13 = 0$. Or,

$$x + 5y - 13 = 0 \Leftrightarrow 5y = -x + 13 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{5}x + \frac{13}{5}$$

donc l'équation réduite de (d) est $y = -\frac{1}{5}x + \frac{13}{5}$.

Propriété 18

Une droite non parallèle à l'axe des ordonnées est la courbe représentative d'une fonction affine et, réciproquement, la courbe d'une fonction affine est une droite non parallèle à l'axe des ordonnées.

Démonstration. Soit (d) une droite non parallèle à l'axe des ordonnées. Alors, (d) a une équation réduite de la forme $y = mx + p$ où m et p sont deux réels quelconques. Ainsi, (d) est la courbe de la fonction affine $x \mapsto mx + p$.

Réciproquement, soit f une fonction affine. Alors, il existe deux réels m et p tels que $f : x \mapsto mx + p$. Dès lors, la courbe de f a pour équation $y = mx + p$ et c'est donc une droite non parallèle à l'axe des ordonnées. $\square$

On va donc retrouver, pour les droites non parallèles à l'axe des ordonnées le vocabulaire et les méthodes vues dans le chapitre 8.

Définition 19

Soit (d) une droite d'équation réduite $y = mx + p$.

1. Le nombre m s'appelle la pente ou le coefficient directeur de (d) .
2. Le nombre p s'appelle l'ordonnée à l'origine de (d) .

Remarque 20. La pente m traduit l'inclinaison de la droite et l'ordonnée à l'origine p est l'ordonnée du point d'intersection de la droite avec l'axe des ordonnées.

Méthode 21 : Déterminer l'équation réduite d'une droite

Supposons qu'on connaisse deux points A et B d'une droite (d) .

Si $x_A = x_B$ alors la droite est parallèle à l'axe des ordonnées et son équation réduite est $x = x_A$.

Sinon, (d) a une équation réduite de la forme $y = mx + p$ et (d) est la courbe de la fonction affine $f : x \mapsto mx + p$. On peut utiliser la méthode 7 du chapitre 8 pour déterminer m et p . En particulier, comme $f(x_A) = y_A$ et $f(x_B) = y_B$, on a

$$m = \frac{f(x_B) - f(x_A)}{x_B - x_A} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$

Exemple 22. Considérons les points A(1 ; -1), B(1 ; 2) et C(2 ; -1).

Comme $x_A = x_B$, l'équation réduite de (AB) est $x = 1$.

Comme $x_B \neq x_C$, l'équation réduite de (BC) est de la forme $y = mx + p$ avec

$$m = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{-1 - 2}{2 - 1} = \frac{-3}{1} = -3$$

De plus, $B \in (BC)$ donc $y_B = mx_B + p$ c'est-à-dire $2 = -3 \times 1 + p$ donc $2 + 3 = p$ c'est-à-dire $p = 5$.

Ainsi, l'équation réduite de (BC) est $y = -3x + 5$.

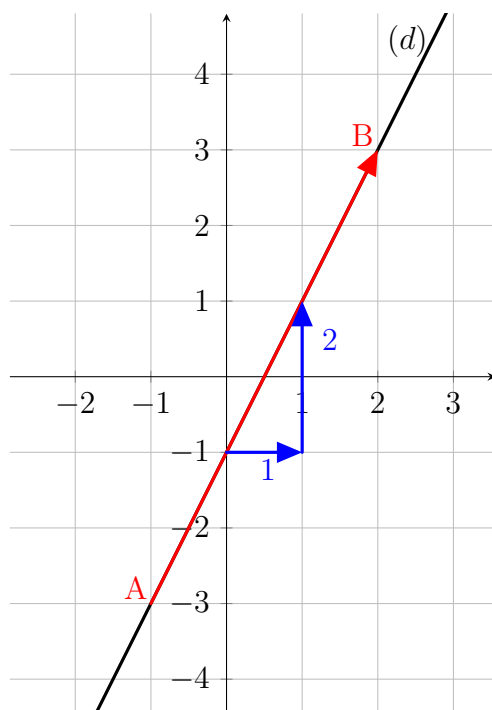
Remarque 23. On remarque que dans l'égalité $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$, les nombres $x_B - x_A$ et $y_B - y_A$ sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ qui est un vecteur directeur de la droite (d) . Ainsi, si au lieu de connaître deux points de la droite (d) , on connaît un point A et un vecteur directeur $\vec{v}(r; s)$ (avec $r \neq 0$) alors $m = \frac{s}{r}$ et on détermine p à l'aide du point A.

Méthode 24 : Déterminer graphiquement m et p

Soit (d) une droite d'équation réduite $y = mx + p$. Graphiquement,

1. p est l'ordonnée du point d'intersection de la droite (d) avec l'axe des ordonnées ;
2. m est la pente de la droite c'est-à-dire le quotient des coordonnées d'un vecteur directeur (ordonnée divisée abscisse) ce qui correspond aussi au déplacement vertical sur la droite associé à un déplacement horizontal de 1 unité.

Exemple 25. Considérons la droite (d) représentée ci-dessous.



La droite (d) coupe l'axe des ordonnées en -1 donc son ordonnée à l'origine est $p = -1$.

Un vecteur directeur de (d) est $\overrightarrow{AB}(3;6)$ donc la pente de (d) est $m = \frac{6}{3} = 2$. De la même manière, on voit grâce aux flèches bleues que lorsqu'on se déplace d'une unité horizontalement, on se déplace de deux unités (vers le haut) donc la pente est 2.

Attention ! si on s'était déplacé vers le bas, la pente aurait été négative.

Méthode 26 : Tracer une droite connaissant son équation réduite

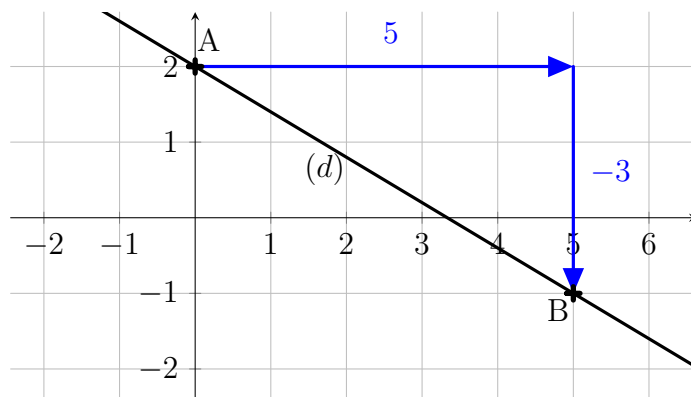
Soit (d) une droite dont on connaît l'équation réduite.

Si l'équation est de la forme $x = k$, on trace la droite parallèle à l'axe des ordonnées passant par l'abscisse k .

Si l'équation est de la forme $y = mx + p$, on place p sur l'axe des ordonnées et on représente la pente partant de ce point à l'aide d'un vecteur directeur $\vec{v}(r; s)$ dont les coordonnées vérifient $m = \frac{s}{r}$.

Exemple 27. Considérons la droite (d) d'équation $y = -\frac{3}{5}x + 2$.

Pour tracer (d) , on commence par placer le point d'ordonnée 2 sur l'axe des ordonnées (il s'agit du point A sur la figure ci-dessous). Ensuite, comme la pente est $m = -\frac{3}{5} = \frac{-3}{5}$, le vecteur $\vec{v}(5; -3)$ est un vecteur directeur de (d) . On représente alors ce vecteur partant de A et on obtient un point B qui permet de tracer la droite (d) .



III. — Alignement, parallélisme et systèmes

1) Alignement

Nous avons vu, dans le chapitre 7, une méthode pour étudier l'alignement de trois points en étudiant la colinéarité de deux vecteurs.

Une autre méthode consiste à utiliser le fait que trois points distincts A, B et C sont alignés si et seulement si le point C appartient à la droite (AB).

Exemple 28. Considérons les points A(-2; -2), B(2; 1) et C(4; 2,5).

Déterminons une équation cartésienne de (AB). Les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont (4; 3) et celles de $\overrightarrow{AM}$ sont (x + 2; y + 2) donc $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) = 4(y+2) - 3(x+2) = 4y + 8 - 3x - 6 = -3x + 4y + 2$. Ainsi, une équation cartésienne de (AB) est $-3x + 4y + 2 = 0$.

Or, $-3x_C + 4y_C + 2 = -3 \times 4 + 4 \times 2,5 + 2 = -12 + 10 + 2 = 0$ donc C appartient à la droite (AB). Ainsi, les points A, B et C sont alignés.

2) Parallélisme

Le but de ce paragraphe est de donner des critères pour déterminer si des droites sont parallèles ou sécantes à l'aide de leurs équations cartésiennes ou réduites.

Propriété 29. — Parallélisme avec des équations cartésiennes

Soit (d) et (d') deux droites d'équations cartésiennes respectives (d) : $ax + by + c = 0$ et (d') : $a'x + b'y + c' = 0$.

Alors, (d) et (d') sont parallèles si et seulement si $ab' - a'b = 0$.

Démonstration. Un vecteur directeur de (d) est $\vec{v}(-b; a)$ et un vecteur directeur de (d') est $\vec{v'}(-b'; a')$. Les droites (d) et (d') sont parallèles si et seulement si $\vec{v}$ et $\vec{v'}$ sont colinéaires c'est-à-dire si et seulement si $\det(\vec{v}, \vec{v'}) = 0$.

Or, $\det(\vec{v}, \vec{v'}) = (-b) \times a' - (-b') \times a = -ba' + b'a = ab' - a'b$. On conclut donc que (d) et (d') sont parallèles si et seulement si $ab' - a'b = 0$. $\square$

Exemple 30. Considérons les droites (d) : $3x - 2y + 2 = 0$ et (d') : $-2x + y + 1 = 0$.

Étant donné que $3 \times 1 - (-2) \times (-2) = 3 - 4 = -1 \neq 0$, les droites (d) et (d') ne sont pas parallèles : elles sont donc sécantes.

Propriété 31. — Parallélismes avec des équations réduites

Soit (d) et (d') deux droites du plan.

1. Si (d) et (d') n'ont pas le même type d'équation réduite alors elles ne sont pas parallèles.
2. Si (d) et (d') ont toutes les deux une équation réduite du type $x = k$ alors (d) et (d') sont parallèles.
3. Si (d) et (d') ont toutes les deux une équation réduite du type $y = mx + p$ alors (d) et (d') sont parallèles si et seulement si elles ont la même pente.

Preuve 32.

1. Si les deux droites n'ont pas le même type d'équation réduite alors l'une est parallèle à l'axe des ordonnées et l'autre est sécante à l'axe des ordonnées donc les deux droites sont sécantes.

2. Si les deux droites ont une équation réduite du type $x = k$ alors elles sont toutes les deux parallèles à l'axe des ordonnées donc elles sont parallèles entre elles.
3. Supposons que (d) a pour équation $y = mx + p$ et que (d') a pour équation $y = m'x + p'$. Alors, une équation cartésienne de (d) est $mx - y + p = 0$ et une équation cartésienne de (d') est $m'x - y + p' = 0$. Ainsi, d'après la propriété 29, (d) et (d') sont parallèles si et seulement si $m \times (-1) - m' \times (-1) = 0$ c'est-à-dire si et seulement si $-m + m' = 0$. On conclut donc que (d) et (d') sont parallèles si et seulement si $m = m'$ c'est-à-dire si et seulement les deux droites ont la même pente.

Exemple 33. — Considérons les droites suivantes :

$$\begin{array}{lll} (d_1) : y = 2x - 1 ; & (d_2) : x = 3 ; & (d_3) : y = -x + 1 ; \\ (d_4) : x = -5 ; & (d_5) : y = 2x ; & (d_6) : y = 3 - x. \end{array}$$

Les droites (d_2) et (d_4) sont parallèles car elles ont une équation de la forme $x = k$.

Les droites (d_1) et (d_5) sont parallèles car leur pente est égale à 2 et les droites (d_3) et (d_6) sont parallèles car leur pente est égale à -1 .

3) Systèmes linéaires de deux équations à deux inconnues

Un système linéaire de deux équations à deux inconnues est un système de la forme :

$$(S) \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

où a, b, c, a', b' et c' sont des réels tels que $(a; b) \neq (0; 0)$ et $(a'; b') \neq (0; 0)$.

Résoudre le système, c'est déterminer l'ensemble des solutions c'est-à-dire l'ensemble des couples de réels $(x; y)$ qui vérifient les deux équations du système.

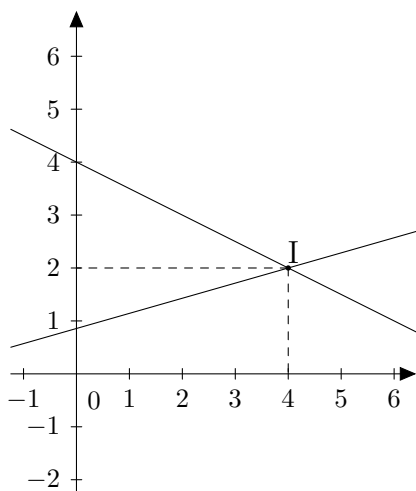
a) Interprétation géométrique

La donnée du système (S) équivaut à la donnée de deux équations cartésiennes de droites $(d) : ax + by = c$ et $(d') : a'x + b'y = c'$. Résoudre le système revient alors à chercher les points M dont les coordonnées $(x; y)$ vérifie les équations des deux droites c'est-à-dire les points communs à (d) et (d') . Il y a trois cas possibles :

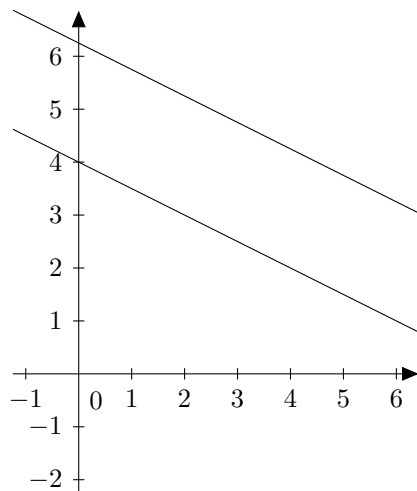
1^{er} cas : si (d) et (d') sont sécantes. Alors, elles ont un unique point commun I donc le système (S) a une unique solution qui est le couple des coordonnées de I.

2^{ème} cas : si (d) et (d') sont strictement parallèles. Alors, elles n'ont aucun point commun donc le système (S) n'a aucune solution. L'ensemble des solutions est donc vide.

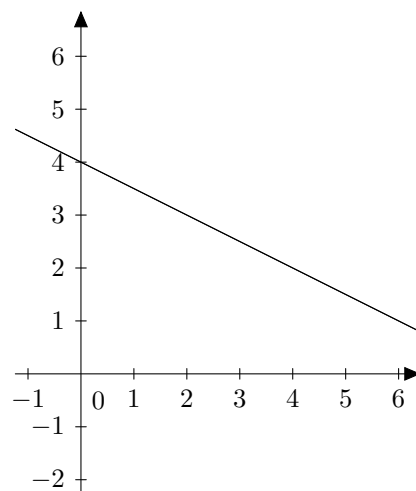
3^{ème} cas : si (d) et (d') sont confondues. Alors, elles ont une infinité de points communs donc le système (S) a une infinité de solutions : c'est l'ensemble des coordonnées des points de $(d) = (d')$.



1^{er} cas :
(d) et (d') sécantes



2^{ème} cas :
(d) et (d') strictement parallèles



3^{ème} cas :
(d) et (d') confondues

Exemple 34. On considère le système $(S) \begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 3x - y = -5 \end{cases}$.

Comme $2 \times (-1) - 3 \times 3 = -11 \neq 0$, les deux droites $(d) : 2x + 3y = 4$ et $(d') : 3x - y = -5$ sont sécantes en un point I. Ainsi, le système (S) possède une et une seule solution.

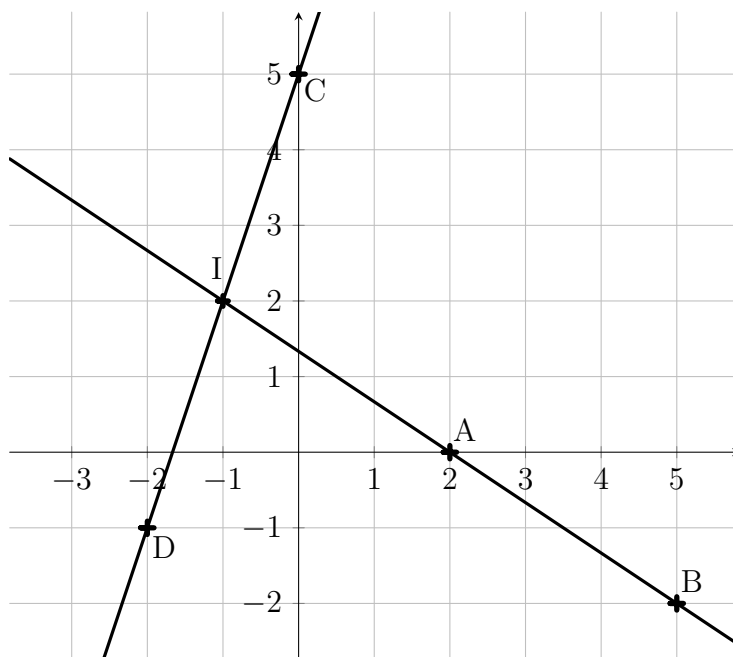
Déterminons-là graphiquement.

Pour cela, on trace dans un même repère les droites (d) et (d') .

Déterminons deux points de (d) . Pour $y = 0$, on obtient $2x = 4$ donc $x = 2$. Ainsi, le point $A(2; 0)$ appartient à (d) . Le choix $x = 0$ conduit à $3y = 4$ c'est-à-dire $y = \frac{4}{3}$ ce qui n'est pas très pratique à placer. En revanche, le choix $y = -2$ donne $2x - 6 = 4$ donc $2x = 10$ c'est-à-dire $x = 5$. Ainsi, le point $B(5; -2)$ appartient à (d) .

Déterminons deux points de (d') . Pour $x = 0$, on obtient $-y = -5$ donc $y = 5$. Ainsi, le point $C(0; 5)$ appartient à (d') . Le choix $y = 0$ conduit à $3x = -5$ c'est-à-dire $x = -\frac{5}{3}$ ce qui n'est pas très pratique à placer. En revanche, le choix $y = -1$ donne $3x + 1 = -5$ donc $3x = -6$ c'est-à-dire $x = -2$. Ainsi, le point $D(-2; -1)$ appartient à (d') .

Traçons à présent (d) et (d') .



Les deux droites sont sécantes en $I(-1; 2)$ donc l'unique solution de (S) est $(-1; 2)$. On peut le vérifier par le calcul : $2 \times (-1) + 3 \times 2 = -2 + 6 = 4$ et $3 \times (-1) - 2 = -3 - 2 = -5$.

Remarque 35. Dans l'exemple précédent, les coordonnées du point I se lisaient facilement sur la figure mais ce n'est pas toujours le cas. Il est donc nécessaire d'avoir une méthode algébrique pour résoudre les systèmes car la méthode graphique peut se révéler imprécise.

On va en fait donner deux méthodes de résolution.

Méthode 36 : Résolution d'un système par substitution

Le principe de résolution par substitution est d'isoler une des inconnues dans une des équations est de la substituer (c'est-à-dire remplacer) dans l'autre équation.

Exemple 37. Appliquons cette méthode au système $(S) \begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 3x - y = -5 \end{cases}$.

On peut par exemple isoler y dans la seconde équation :

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ -y = -3x - 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ y = 3x + 5 \end{cases}$$

Ensuite, on remplace y par $3x + 5$ dans la première équation :

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3 \times (3x + 5) = 4 \\ y = 3x + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 9x + 15 = 4 \\ y = 3x + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 11x + 15 = 4 \\ y = 3x + 5 \end{cases}$$

On peut alors déterminer x grâce à la première équation :

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 11x = -11 \\ y = 3x + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 3x + 5 \end{cases}$$

Enfin, on remplace x par -1 dans la seconde équation et on trouve y :

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \times (-1) + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -3 + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$$

On retrouve bien que l'unique solution de (S) est $(-1; 2)$.

Méthode 38 : Résolution d'un système par combinaisons linéaires

Le principe de résolution par combinaisons linéaires est de multiplier chaque ligne par un coefficient adapté de telle sorte qu'en ajoutant (ou en retranchant) une ligne à l'autre, on supprime une des deux inconnues.

Exemple 39. Appliquons cette méthode au système $(S) \begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 3x - y = -5 \end{cases}$.

En multipliant la première ligne par 3 et la seconde par 2, on obtient $6x$ sur chaque ligne donc en soustrayant les deux lignes, on supprimera les x . En notant L_1 la première ligne et L_2 la seconde ligne, on notera cette combinaison $3L_1 - 2L_2$. On trouve alors $3(2x + 3y) - 2(3x - y) = 3 \times 4 - 2 \times (-5)$ c'est-à-dire $6x + 9y - 6x + 2y = 12 + 10$ donc $11y = 22$ et ainsi $y = 2$.

En multipliant L_2 par 3 et en l'ajoutant à L_1 , on élimine les y et on trouve $2x+3y+3(3x-y) = 4 + 3 \times (-5)$ c'est-à-dire $2x + 3y + 9x - 3y = 4 - 15$ donc $11x = -11$ et ainsi $x = -1$.

Dans la pratique, on rédige de la manière suivante (la notation $L_1 \leftarrow L_1 + 3L_2$ signifiant qu'on remplace la ligne L_1 par la combinaison $L_1 + 3L_2$)

$$\begin{aligned}
 (S) \begin{cases} 2x + 3y = 4 & L_1 \\ 3x - y = -5 & L_2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (2x + 3y) + 3(3x - y) = 4 + 3 \times (-5) & L_1 \leftarrow L_1 + 3L_2 \\ 3(2x + 3y) - 2(3x - y) = 3 \times 4 - 2 \times (-5) & L_2 \leftarrow 3L_1 - 2L_2 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y + 9x - 3y = 4 - 15 \\ 6x + 9y - 6x + 2y = 12 + 10 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} 11x = -11 \\ 11y = 22 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}
 \end{aligned}$$

On retrouve donc que l'unique solution de (S) est $(-1; 2)$.